



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Vejstrækningers geometri

Kørselsdynamik

Bolet, Lars

Publication date:
2015

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Bolet, L. (2015). *Vejstrækningers geometri: Kørselsdynamik*. Department of Civil Engineering, Aalborg University. DCE Lecture notes Nr. 39

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



Vejstrækningers geometri Kørseldynamik

Lars Bolet



Aalborg Universitet
Institut for Byggeri og Anlæg
Trafikforskningsgruppen

DCE Lecture Notes No. 39

Vejstrækningers geometri – Kørselsdynamik

Lars Bolet

Videnskabelige publikationer ved Institut for Byggeri og Anlæg

Technical Reports anvendes til endelig afrapportering af forskningsresultater og videnskabeligt arbejde udført ved Institut for Byggeri og Anlæg på Aalborg Universitet. Serien giver mulighed for at fremlægge teori, forsøgsbeskrivelser og resultater i fuldstændig og uforkortet form, hvilket ofte ikke tillades i videnskabelige tidsskrifter.

Technical Memoranda udarbejdes til præliminær udgivelse af videnskabeligt arbejde udført af ansatte ved Institut for Byggeri og Anlæg, hvor det skønnes passende. Dokumenter af denne type kan være ufuldstændige, midlertidige versioner eller dele af et større arbejde. Dette skal holdes in mente, når publikationer i serien refereres.

Contract Reports benyttes til afrapportering af rekvireret videnskabeligt arbejde. Denne type publikationer rummer fortroligt materiale, som kun vil være tilgængeligt for rekvirenten og Institut for Byggeri og Anlæg. Derfor vil Contract Reports sædvanligvis ikke blive udgivet offentligt.

Lecture Notes indeholder undervisningsmateriale udarbejdet af undervisere ansat ved Institut for Byggeri og Anlæg. Dette kan være kursusnoter, lærebøger, opgavekompendier, forsøgsmanualer eller vejledninger til computerprogrammer udviklet ved Institut for Byggeri og Anlæg.

Theses er monografier eller artikelsamlinger publiceret til afrapportering af videnskabeligt arbejde udført ved Institut for Byggeri og Anlæg som led i opnåelsen af en ph.d.- eller doktorgrad. Afhandlingerne er offentligt tilgængelige efter succesfuldt forsvar af den akademiske grad.

Latest News rummer nyheder om det videnskabelige arbejde udført ved Institut for Byggeri og Anlæg med henblik på at skabe dialog, information og kontakt om igangværende forskning. Dette inkluderer status af forskningsprojekter, udvikling i laboratorier, information om samarbejde og nyeste forskningsresultater.

© Aalborg Universitet

Udgivet 2015 af
Aalborg Universitet
Institut for Byggeri og Anlæg
Sohngårdsholmsvej 57,
DK-9000 Aalborg, Danmark

Trykt i Aalborg på Aalborg Universitet

ISSN 1901-7286
DCE Lecture Notes No. 39

INDHOLDSFORTEGNELSE

Indholdsfortegnelse.....	5
1 Indledning.....	7
1.1 Målgruppe og formål.....	7
1.2 Notatet og vejreglerne.....	7
1.3 Enheder og notation.....	8
2 Kræfter.....	11
2.1 Tyngdekraften, F_G	12
2.2 Centripetal- og centrifugalkræfter, F_C	12
2.3 Vindkræfter og luftmodstand, F_L	13
2.4 Rullemodstand, F_R	15
2.5 Trækraften, F_T	16
2.6 Friktionskræfter, F_F	18
2.7 Vejens normalreaktionskræfter, F_N	22
2.8 Kraftligevægt.....	22
2.9 Opgaver.....	26
3 Kørselsdynamik.....	27
3.1 Kørselsdynamiske mål.....	27
3.2 Forudsætninger og virkelighed.....	27
3.3 Opgaver.....	29
4 Kurvekørsel.....	31
4.1 Situationen ved kørsel i en kurve.....	31
4.2 Væltning.....	32
4.3 Udskridning.....	32
4.4 Komfortabel kurvekørsel.....	34
4.5 Frihåndshastighed og compensationfaktor.....	36
4.6 Opgaver.....	38
5 Bakkekørsel.....	39
5.1 Situationen ved kørsel på en stigning.....	39
5.2 Igangsætning.....	40
5.3 Retardation og acceleration på bakke.....	42
5.4 Vertikal centrifugalacceleration.....	44
5.5 Opgaver.....	45
6 Standsning.....	47

6.1	Standsnings-model.....	47
6.2	Reaktionstiden.....	48
6.3	Friktionskoefficienten.....	50
6.4	Opgaver.....	56
7	Sigt.....	57
7.1	Stopsigt, mødesigt og overhalingssigt	57
7.2	Øjets opløsningsevne.....	60
7.3	Sigt i vertikalkurver	61
7.4	Sigt i horisontalkurver	67
7.5	Opgaver.....	71
	Bibliografi.....	73
	Stikordsregister	75

1 INDLEDNING

1.1 Målgruppe og formål

Undervisningsnotaterne om vejstrækningers geometri er skrevet i undervisningsøjemed. Det retter sig mod studerende ved Aalborg Universitets bygge- og anlægsingeniøruddannelse, navnlig de studerende, der specialiserer sig i vej- og trafikfagene.

Formålet er at præsentere de studerende for emnets grundlæggende begreber, forudsætninger og metoder, samt at sætte de studerende i stand til at foretage beregninger inden for emnet.

I nærværende notat omhandler kapitel 2 optrædende kræfter, mens de efterfølgende kapitler 3-6.4 beskæftiger sig med kræfterne i forskellige kørselsdynamiske situationer. Det sker i kørselsdynamiske modeller, der hver behandler situationer, som trafikanter på enhver vej skal kunne mestre ved håndteringen af sit køretøj: såsom kørsel gennem en horisontalkurve, kørsel op ad en bakke, nedbremsning af køretøjet, samt overhaling af et køretøj. Modellerne er trivielle i og med, at de bygger på den klassiske, rationelle mekanik og følger naturlovene. De fastlægger et spænd for de traceringslementer, som vejen kan udformes med.

Et parallelt udarbejdet undervisningsnotat (Bolet & Kjems, 2015) behandler vejstrækningers tracering, herunder blandt andet den grundlæggende fagterminologi samt processen med at fastlægge en vejs udformning.

1.2 Notatet og vejreglerne

Til praktisk brug kan undervisningsnotaterne ikke stå alene. Her må man inddrage anvisningerne i de nationale vejregler, ligesom man skal være opmærksom på, at den endelige vejudformning fastlægges dels i et tæt samspil med udformningen af vejens tværprofil og med løsningen af blandt andet vejens krydsninger, vejens afvanding og vejens befæstelsesopbygning, dels så de indgreb, som vejen medfører i sine omgivelser, bliver acceptable.

De vejregler, som man i Danmark skal iagttage, er navnlig vejreg-

De danske vejregler fastsættes efter bemyndigelse til Transportministeren og udsendes af Vejdirektoratet. Vejreglerne findes på vejregelportalen: <http://vejregler.lovportaler.dk/>. Bemærk, at portalen giver mulighed for at afgrænse søgning efter emner, dokumenttyper, status og udgivelsesår.

lerne om trafikarealer i byer og i åbent land. To forhold er vigtige at holde sig for øje i den sammenhæng.

For det første undergår vejreglerne løbende opdateringer. Derfor skal man holde sig ajour med de nyeste vejregler – og med ny viden, som er på vej ind i vejreglerne.

For det andet rummer vejreglerne om vejudformningen meget få bindende bestemmelser. De fleste af vejreglernes anvisninger på dette område er ikke-bindende vejledninger og gode råd. Selv om det *ofte* er værd at følge anvisningerne, så skal det *altid* vurderes, om anvisningerne står til troende i den konkrete situation.

Det er vejingeniørens ansvar at denne vurdering sker. Det gælder såvel ved projektering af en ny vej, som når der senere i vejens levetid skal tages stilling til ændringer af vejens indretning.

Vejingeniøren skal være sig sit ansvar bevidst. Forkerte valg kan få vidtrækkende følger. Lemper man på den geometriske standard, så risikerer man, at trafikanterne bringes i situationer, som de ikke er beredt på at håndtere. Det kan føre til fatale færdselsulykker. Strammer man standarden unødigt meget, så influerer det på de reguleringer, der er nødvendige i forhold til det omgivende landskab og naboer.

Vejreglerne stiller altså vejingeniøren i et dilemma, der udfordrer dekorum: Hvor langt er det fagligt forsvarligt at tilgodese eksterne ønsker, herunder økonomiske hensyn, og hvornår skal man stå fast på sit fags etiske kodeks?

Forhåbentlig kan notaterne også være med til at give et mere sikkert ståsted i den afvejning.

1.3 Enheder og notation

Dette afsnit burde være overflødigt, men al erfaring siger, at håndteringen af hastighedsenhederne i praksis giver anledning til idelige fejl.

Langt de fleste størrelser, der anvendes i vejbygningsfaget, herunder de kørselsdynamiske modeller, opgives i SI-enheder, eventuelt med brug af gængse præfikser. Det indebærer, at formler umiddelbart kan anvendes uden omregningsfaktorer.

Der er imidlertid nogle åbenlyse undtagelser. En af undtagelserne angår vinkelmålet – en fuld cirkel opdeles ofte i 360° , og der skal altså foretages omregning mellem grader ($^\circ$) og radianer. En anden undtagelse angår tiden og dermed hastigheden.

Til dagligt angiver vi i trafikken hastigheder i enheden kilometer per time (km/h). Det betyder, at vi skal huske omregning til enheden meter per sekund (m/s), når vi sætter hastigheder ind i vore formler, og til enheden km/h, når vi får en hastighed ud af en formel. Vi skal altså tage højde for, at der går 1000 meter på en kilo-

meter, og at der går 60 minutter á 60 sekunder eller i alt 3600 sekunder på en time.

I vor notation skelner vi ofte mellem de to hastighedsenheder. Hastigheder i km/h skrives med stort, typisk med et stort V . Hastigheder i m/s skrives med småt, typisk med et v . Med denne notation gælder:

$$[1] \quad v = \frac{1000}{60 \cdot 60} \cdot V = \frac{1}{3,6} \cdot V \text{ eller } V = 3,6 \cdot v$$

Eksempel 1.A – Omregning af hastighed

Givet: En bilist kører 72 km/h, da hun observerer, at vejen foran hende er blokeret af en trafikulykke. Bilisten er 3,0 sekunder om at reagere på observationen. Bestem den afstand, som køretøjet tilbagelægger, før bilisten får aktiveret bremserne, idet det antages, at køretøjet vil fortsætte med uændret hastighed, 72 km/h under reaktionstiden på de 3 sekunder.

Løsning: Hastigheden omregnes fra km/h til m/s:

$$V = 72 \text{ km/h} = 72 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = 20 \text{ m/s} = v$$

Den tilbagelagte afstand, L , findes som produktet af hastigheden, v , og reaktionstiden, t :

$$L = v \cdot t = 20 \cdot 3,0 \text{ m} = 60 \text{ m} \quad \square$$



2 KRÆFTER

I den klassiske fysiks ideale verden vil en partikel, der ikke er udsat for en resulterende kraft, bevæge sig i uændret retning med konstant hastighed. Bevægelsen sker uden energitab.

Hvis der virker en resulterende kraft på partiklen, vil partiklens bevægelse blive påvirket i kraftens retning. Den resulterende kraft på partiklen kan opløses i en komponent, der er parallel med den øjeblikkelige hastighed, og en komponent, der er vinkelret herpå.

Den kraftkomponent, der er parallel med hastigheden, vil give anledning til en acceleration eller, hvis den virker modsat hastigheden, til en deceleration af partiklen. Den kraftkomponent, der er vinkelret på hastigheden, udgør en sideacceleration, der bevirker, at partiklen ændrer retning.

Den virkelige verden er ikke ideel. Beskrivelsen af et køretøjs bevægelse må derfor rumme tilnærmelser, der søger at give en fornuftig, forenklet fremstilling af den virkelige situation.

Vi vil nedenfor beskrive de kræfter, F , der påvirker et køretøj, når det bevæger sig fremad i stationeringsretningen på en helt plan overflade. Vi udtrykker kræfterne i forhold til vejkoordinatsystemet.

Vejkoordinatsystemet¹ (xyz) er lokalt fastlagt for hvert punkt på vejens tracé. Begyndelsespunktet (origo) ligger på linjeføringen. x -aksen ligger vandret i tværsnitsplanet og er positiv til højre set i stationeringsretningen. y -aksen ligger i horisontalplanet som tangent til linjeføringen og er positiv i stationeringsretningen. z -aksen (koteaksen) er lodret og positiv opad. (Vejdirektoratet-Vejregelrådet, 2004).

Vejoverfladen er ikke vandret. I forhold til det vandrette plan betegnes dens hældningsvinkel i kørselsretningen α_t , svarende til en tangentiell gradient på $i_t = \tan \alpha_t$. Tilsvarende betegnes vejoverfladens hældningsvinkel vinkelret på kørselsretningen α_r , svarende til en radial gradient på $i_r = \tan \alpha_r$. Gradienterne udtrykkes i danske fagkredse i promille (‰)².

¹ Jævnfør også kapitlet om Grundbegreber i undervisningsnoten *Vejstrækningers geometri – Tracering* (Bolet & Kjems, 2015).

² Overfor lægmand udtrykkes hældningen dog ofte i procent, fx på A46-færdselstavler, jævnfør notatets forside-vignet.

Den tangentielle gradient (længdegradienten), i_t , regnes positiv, når vejoverfladen stiger i kørselsretningen.

Den radiale gradient (sidegradienten), i_r , regnes positiv, når vejoverfladen falder mod den aktuelle horisontalkurves centrum.

2.1 Tyngdekraften, F_G

Tyngdekraften, F_G [N], virker i tyngdepunktet og er altid rettet lodret mod jorden:

$$[2] \quad \mathbf{F}_G = \begin{bmatrix} F_{Gx} \\ F_{Gy} \\ F_{Gz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \cdot g \end{bmatrix}$$

... hvor:

M | er køretøjets masse [kg] og

g | er tyngdeaccelerationen; $g = 9,818 \text{ m/s}^2$ i Danmark¹

Eksempel 2.A – Stigningsmodstand

Givet: En personbil, der vejer $M = 2000 \text{ kg}$, kører op ad en retlinet bakke med længdegradient $i_t = 35 \text{ ‰}$. Bestem den kraft der skal overvindes som følge af stigningen. Sidegradienten sættes til $i_r = 0$.

Løsning: Længdeprofillets vinkel med vandret, α_t , bestemmes:

$$\alpha_t = \tan^{-1} i_t = \tan^{-1} 0,035 = 2,005^\circ$$

Den kraft, der skal overvindes som følge af stigningen, er tyngdekraftens komponent parallelt med vejoverfladen i kørselsretningen, altså:

$$\begin{aligned} F_{\text{stigning}} &= M \cdot g \cdot \sin \alpha_t \\ &= 2000 \cdot 9,818 \cdot \sin 2,005^\circ = 687 \text{ N} = 0,7 \text{ kN} \end{aligned}$$

□

2.2 Centripetal- og centrifugalkræfter, F_C

Når et køretøj bevæger sig gennem en horisontalkurve, er det udsat for en sideacceleration, der er rettet mod kurvens krumningscentrum.

Sideaccelerationen svarer til, at køretøjet udsættes for en centripetalkraft, der fastholder køretøjet i en cirkulær bevægelse om kurvens centrum. Hvis et legeme med massen M [kg] bevæger sig med farten² v [m/s] i en cirkelbue med radius R [m], har centripetalkraften, F_C [N], størrelsen:

¹ Bemærk, at de danske vejregler systematisk har anvendt den nedrundede værdi, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

² Hastighed og fart er ikke synonymer; hastigheden er retningsbestemt, mens farten blot angiver hastighedens størrelse, dvs. at farten v udtrykker den numeriske værdi af hastighedsvektoren, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$:

$$v = |\mathbf{v}| = [(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)]^{1/2}.$$

$$[3] \quad \mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} F_{Cx} \\ F_{Cy} \\ F_{Cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm M \cdot \frac{v^2}{R} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

... hvor plus-tegnet anvendes i højredrejende horisontalkurver, altså hvor kurvens radius befinder sig til højre for køretøjets kørselsretning, og minus-tegnet anvendes i venstredrejende horisontalkurver.

Bemærk, at sideaccelerationen kan relateres til en lige så stor, men modsat rettet centrifugalkraft, der virker i køretøjets tyngdepunkt. Centrifugalkraften er imidlertid en indbildt kraft, som trafikanterne mener presser dem udad under kurvekørslen. Det, trafikanterne faktisk er udsat for, er, at køretøjet accelereres ind mod kurvens centrum.

Traditionelt har vejbygningen baseret sine kørselsdynamiske modeller på centrifugalkraften og ikke på centripetalkraften. De to betragtninger fører til samme resultater. Traditionen følges i det efterfølgende.

Eksempel 2.B – Centripetalkraft

Givet: En 100 kg tung cyklist kører med hastigheden 36 km/h gennem en højredrejende horisontalkurve med radius 50 m. Bestem størrelsen af den centripetalkraft, som optræder på cyklisten under gennemkørslen af kurven.

Løsning: Hastigheden omregnes fra km/h til m/s:

$$V = 36 \text{ km/h} = 36 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = 10 \text{ m/s} = v$$

Størrelsen af den optrædende centripetalkraft, F_C , bestemmes af formel [3], idet massen er $M = 100 \text{ kg}$, og idet horisontalkurveradius er $R_h = 50 \text{ m}$:

$$|F_C| = M \cdot \frac{v^2}{R_h} = 100 \cdot \frac{100^2}{50} \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 0,2 \text{ kN} \quad \square$$

2.3 Vindkræfter og luftmodstand, F_L

Vindkræfter negligeres normalt i vejbygningens kørselsdynamiske modeller. Der ses altså i reglen bort fra påvirkningerne fra eventuel sidevind samt med- og modvind. Der er to undtagelser fra denne hovedregel.

Den ene undtagelse gælder særligt vindudsatte steder, hvor der kan optræde kritiske vindstød, som kan give risiko for, at navnlig »høje, lette køretøjer« vælter. Det sker, hvis kraftpåvirkningen på køretøjet er sammensat, så den resulterende kraft falder uden for det rektangel, som køretøjets hjul danner, jævnfør afsnit 4.2. Derved giver kræfterne anledning til et moment, som ikke kan modvirkes. Situationen kan navnlig henføres til fritliggende brostrækninger over større vandområder, hvor vinden kan blæse frit. Den kan også optræde i ekstremssituationer fx under orkan. Situationen er kendt fra de varsler, som lejlighedsvis udsendes for de store broer.

Den anden undtagelse er selve luftmodstanden. Luftmodstanden, F_L [N], indregnes normalt kun i én enkelt af vejgeometriens kørselsdynamiske modeller, nemlig ved bestemmelse af de hastighedsprofiler for tunge køretøjer, der benyttes til vurdering af behovet for et eventuelt krybespor, jævnfør afsnit 5.3. Luftmodstanden regnes her virkende modsat køretøjets bevægelsesretning og hæmmer altså den fortsatte bevægelse. Den virker i en højde, h_L , over vejoverfladen. Højden er karakteristisk for køretøjets geometri.

Strengt taget bør luftmodstanden betragtes som virkende i yz -planet og parallelt med vejoverfladen. Normalt gøres dog den tilnærmelse, at den alene regnes for virkende modsat vejkoordinat-systemets y -akse. Tilnærmelsen kan retfærdiggøres, dels fordi der er stor usikkerhed knyttet til de parametre, der bestemmer luftmodstandens størrelse, dels fordi længdegradienten er så lille, at de fejl, der begås ved at lade sinus og cosinus til den tangentielle hældningsvinkel være 0 henholdsvis 1, er ubetydelige sammenlignet med usikkerheden.

Luftmodstandens størrelse beror på komplicerede aerodynamiske forhold. Ved et motorkøretøjs bevægelse gennem atmosfærisk luft er *Reynolds tal*¹ imidlertid højt, og størrelsen af luftmodstanden kan derfor angives ved en simpel formel:

$$[4] \quad \mathbf{F}_L = \begin{bmatrix} F_{Lx} \\ F_{Ly} \\ F_{Lz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_W \cdot A \cdot v^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

... hvor:

ρ	er luftens densitet [kg/m ³],
C_W	er en dimensionsløs størrelse [-], der afhænger af køretøjets form og overfladefriktion og
A	er køretøjets frontareal [m ²]

Densiteten af atmosfærisk luft afhænger af temperaturen, luftfugtigheden og barometerstanden; det er altså ikke en konstant størrelse. Eksempelvis har tør luft ved havets overflade en densitet på 1,3 kg/m³ ved 0 °C og på 1,2 kg/m³ ved 20 °C.

Størrelsen C_W er køretøjsspecifik og er genstand for optimering fra bilfabrikanternes side. Personbiler har C_W -værdier i størrelsesordenen 0,3-0,5, mens trailere og lastbiler ligger på det dobbelte.

¹ Osborne Reynold (1842-1912), engelsk fysiker.
Reynolds tal, Re , er en dimensionsløs størrelse, der afhænger af det pågældende mediums strømningshastighed, densitet og viskositet samt af størrelsen af kontaktfladen til omgivelserne. Reynolds tal angiver om en strømning vil være laminar ($Re < 1$) eller turbulent ($Re > 1000$).

I et vejgeometrisk øjemed er udsvingene i luftens densitet og forskellene i bilmærkernes C_W -værdier uinteressant. I stedet fastsættes luftmodstanden i forhold til dimensionsgivende typekøretøjer, der repræsenterer et relevant segment af den pågældende del af bilparken, fx lastvogne eller sættevognstog. I denne sammenhæng erstattes leddene $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_W$ i udtryk [4] med en ny størrelse, typekøretøjets luftmodstandskoefficient C_L [kg/m³], således at formelen bliver:

$$[5] \quad \mathbf{F}_L = \begin{bmatrix} F_{Lx} \\ F_{Ly} \\ F_{Lz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -C_L \cdot A \cdot v^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eksempel 2.C – Luftmodstand

Givet: En lastbil med luftmodstandskoefficient $C_L = 0,5$ kg/m³ og frontareal $A = 8,0$ m² kører med en hastighed på 72 km/h. Bestem størrelsen af den luftmodstand, som køretøjet skal overvinde.

Løsning: Hastigheden omregnes fra km/h til m/s:

$$V = 72 \text{ km/h} = 72 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = 20 \text{ m/s} = v$$

Størrelsen af luftmodstanden, F_L , bestemmes af formel [5]:

$$|\mathbf{F}_L| = C_L \cdot A \cdot v^2 = 0,5 \cdot 8,0 \cdot 20^2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1,6 \text{ kN} \quad \square$$

2.4 Rullemodstand, F_R

Rullemodstanden, F_R [N], er udtryk for de energitab, der sker i køretøjets bevægelige dele, eller som altid optræder, når et hjul ruller på en vejoverflade. Det er en sammensat kraft, der består af flere forskellige bidrag. Blandt de kræfter, der virker, er:

- Den egentlige rullemodstand i form af det moment, som stammer fra, at hultrykket, F_M , virker i en lille afstand, d_M , foran hjulakslen.
- Friktionen i hjullejer og i transmissionssystemet.
- Deformationsmodstand i det pneumatiske hjuls gummi hidrørende fra indre og ydre friktionstab og hysteretab.
- Stødmodstand fra hjulenes svingende bevægelse på en ikke helt plan vejoverflade.

Ved kørsel på ujævn eller hullet vej giver også de vertikale rystelser af køretøjet et energitab.

Størrelsen af energitabet i kontaktfladen mellem hjul og vejbelægning afhænger af den normalkraft, der overføres, og af dækkets og vejoverfladens struktur og aktuelle materialeegenskaber. Denne del af rullemodstanden er således nært beslægtet med friktionskræfterne.

Rullemodstanden virker altid modsat hjulets bevægelsesretning. Ligesom tilfældet er det ved luftmodstanden regnes også rullemodstanden dog normalt som virkende alene parallelt med y -aksen i vejkoordinatsystemet. Størrelsen af rullemodstanden kan derfor udtrykkes:

$$[6] \quad \mathbf{F}_R = \begin{bmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \\ F_{Rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu_R \cdot |\mathbf{F}_N| \\ 0 \end{bmatrix}$$

... hvor:

μ_R er en rullemodstandskoefficient [-] og
 $|\mathbf{F}_N|$ er størrelsen af normalreaktionskraften, jævnfør afsnit 2.7

Rullemodstandskoefficienten afhænger af køretøjstype, dæk og vejoverfalden, navnlig teksturen. Koefficienten kan eventuelt angives stigende med hastigheden eller med hastighedskvadratet.

Bemærk, at vi i formel [6] betragter hele køretøjets normalreaktionskraft. Det kan være nødvendigt at betragte det enkelte hjul og den normalreaktionskraft, som det bærer, hver for sig.

Eksempel 2.D – Rullemodstand

Givet: En personbil, der vejer $M = 2000$ kg, kører ad en retlinet, vandret vej. Bestem den kraft, der skal overvindes som følge af rullemodstanden, når kørslen sker på våd, men god fast belægning med en rullemodstandskoefficient på $\mu_R = 0,015$, henholdsvis når kørslen sker på en ujævn og hullet, fast belægning med rullemodstandskoefficient på $\mu_R = 0,032$. Sidegradienten sættes til $i_r = 0$.

Løsning: Da vejen er vandret, regnes normalreaktionskraften lig tyngdekraften:

$$|\mathbf{F}_N| = M \cdot g = 2000 \cdot 9,818 \text{ N} = 19,6 \text{ kN}$$

På den våde, men gode og faste belægning bestemmes rullemodstanden F_R , jævnfør formel [6]:

$$|\mathbf{F}_R| = \mu_R \cdot |\mathbf{F}_N| = 0,015 \cdot 19,6 \text{ kN} = 0,3 \text{ kN}$$

På den ujævne og hullede, faste belægning bestemmes rullemodstanden, tilsvarende:

$$|\mathbf{F}_R| = \mu_R \cdot |\mathbf{F}_N| = 0,032 \cdot 19,6 \text{ kN} = 0,6 \text{ kN} \quad \square$$

2.5 Trækkraften, F_T

Køretøjets trækkraft, F_T [N], indgår i den kørselsdynamiske model, der anvendes til at bedømme behovet for et eventuelt krybespor, jævnfør afsnit 5.3.

Trækkraften kommer fra motoren og overføres gennem differentialer og drivaksler til køretøjets drivende hjul. Herved kommer den til at virke i kontaktfladerne mellem vejoverfladen og de drivende hjuls dæk. Den giver sig udtryk i vejoverflade-parallele friktionskræfter, der virker i hjulenes bevægelsesretning, og som normalt driver køretøjet fremad; men som ved motorbremsning kan være decelererende.

Som tilfældet er det ved luftmodstanden og rullemodstanden regnes også trækkraften normalt som virkende alene parallelt med y -aksen i vejkoordinatsystemet.

Trækkræften vurderes for typekøretøjer. Størrelsen afhænger af motorens effekt og af den aktuelle hastighed. Der gælder følgende sammenhæng:¹

$$[7] \quad \mathbf{F}_T = \begin{bmatrix} F_{Tx} \\ F_{Ty} \\ F_{Tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{P_M \cdot \eta}{v} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{max} \cdot \frac{p_T}{v} \\ 0 \end{bmatrix}$$

... hvor:

P_M	er motoreffekten [W],
η	er virkningsgraden [-],
v	er den aktuelle hastighed [m/s],
M_{max}	er køretøjets maksimalt tilladte vægt [kg] og
p_T	er køretøjets »trækeeffekt« pr. vægtenhed [W/kg]

Køretøjets ydeevne opgives ofte pr. vægtenhed, dvs. som et relativt udtryk for »trækeeffekten« i den situation, hvor køretøjet er fuldt lastet svarende til dimensioneringsforudsætningerne. Der er heri taget hensyn til virkningsgraden.

Kraften regnes normalt ligeligt fordelt på køretøjets drivende hjul, idet det forudsættes, at de nødvendige friktionskræfter kan tilvejebringes ved samtlige drivende hjul. Hvis denne forudsætning ikke holder, vil der optræde hjulspind.

Ved nedbremsning i forbindelse med forudsigelige, naturlige hastighedstilpasninger, fx på en motorvejsfrakørsel, antages trafikkanterne i en vis udstrækning at betjene sig af motorbremsning. Motorbremsningen kan beskrives ved en bagudrettet kraft, \mathbf{F}_M [N]. Den udtrykkes i reglen at have en konstant størrelse.

Eksempel 2.E – Trækraft

Givet: En lastbil med maksimalvægt $M_{max} = 30.000$ kg har en trækeeffekt på $p_T = 6,0$ W/kg. Bestem størrelsen af den trækraft, som lastbilen kan levere ved hastigheden 72 km/h.

Løsning

Hastigheden omregnes fra km/h til m/s:

$$V = 72 \text{ km/h} = 72 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = 20 \text{ m/s} = v$$

Trækkræften ved denne hastighed, F_T , bestemmes af formel [7]:

$$|\mathbf{F}_T| = M_{max} \cdot \frac{p_T}{v} = 30.000 \cdot \frac{6,0}{20} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,0 \text{ kN} \quad \square$$

¹ Kaldes motoreffekten P_M [W], og motorakslens omdrejningstal n [s^{-1}] findes størrelsen af motorakslens moment $|\mathbf{M}_M| = P_M/n$ [J]. Med en virkningsgrad på η [-] og et udvekslingsforhold på m [-] bliver den samlede størrelse af momenterne på de drivende hjul: $|\mathbf{M}_H| = P_M \cdot \eta \cdot m / 2 \pi \cdot n$ [J]. Har hjulene en radius på r [-], bliver størrelsen af køretøjets samlede trækraft $|\mathbf{F}_T| = P_M \cdot \eta \cdot m / 2 \pi \cdot n \cdot r$ [N] – forudsat at den nødvendige friktion kan skabes. Køretøjet bevæger sig afstanden $2 \cdot \pi \cdot r$ for hver omdrejning af hjulakslen, svarende til hastigheden $|\mathbf{v}| = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot n / m$ [m/s]. Indsættes denne hastighed i udtrykket for trækkræften, findes $|\mathbf{F}_T| = P_M \eta / v$.

2.6 Friktionskræfter, F_F

Friktionen, F_F [N], stammer fra kontakten mellem køretøjets dæk og vejoverfladen.

Friktionskræfterne kan opfattes som kompenserende kræfter, der altid vil virke modsat kræfter, der er parallelle med vejoverfladen og søger at få de enkelte dæk til at glide på vejbelægningen; det kan være såvel accelererende eller decelererende kræfter som kræfter, der virker tangentielt eller radiale i forhold til hjulets bevægelsesretning. At friktionskræfterne er kompenserende betyder, at den samlede friktion antager den størrelse og retning, der netop er nødvendig for at modvirke, at køretøjets dæk skrider. Bemærk, at denne måde at opfatte friktionskraften på, kun holder vand, hvis man betragter centrifugalkraften som en virkelig kraftpåvirkning af køretøjet.¹

Det er praktisk at skelne mellem friktionskræfterne i to forskellige kørselssituationer.

Ved almindelig kørsel, hvor køretøjet navnlig drives fremad af motorens trækraft, optræder tangentielle friktionskræfter, F_{Ft} , som overfører trækraften gennem køretøjets drivende hjul. Da en del af trækraften, F_T , skal anvendes til at overvinde rullemodstanden, F_R , i de drivende hjul, bliver størrelsen af den tangentielle friktionskraft ved det enkelte, drivende hjul i dette tilfælde:

$$[8] \quad F_{Ft} = F_T - F_R$$

Ved opbremsning aktiveres i stedet, men på samme måde bremsende, tangentielle friktionskræfter, F_{Fb} , idet køretøjets bremsesystem reducerer eller standser hjulenes rotationshastighed. Det er i dag almindeligt, at et køretøj bremser på alle sine hjul, og det forudsættes også her.

I begge situationer bevirker radiale friktionskræfter, F_{Fr} , at køretøjer holder sin bane i sideværts retning.

Friktionskraftens størrelse er begrænset opad af den normalkraft, F_N , der overføres i kontaktfladen, og af friktionsegenskaberne mellem dækket og vejoverfladen. Begrænsningen kan udtrykkes:

$$[9] \quad |F_F| = f \cdot |F_N| \leq \mu_{Max} \cdot |F_N|$$

... hvor:

f | er den friktionskoefficient [-], der aktuelt optræder i pågældende retning, og

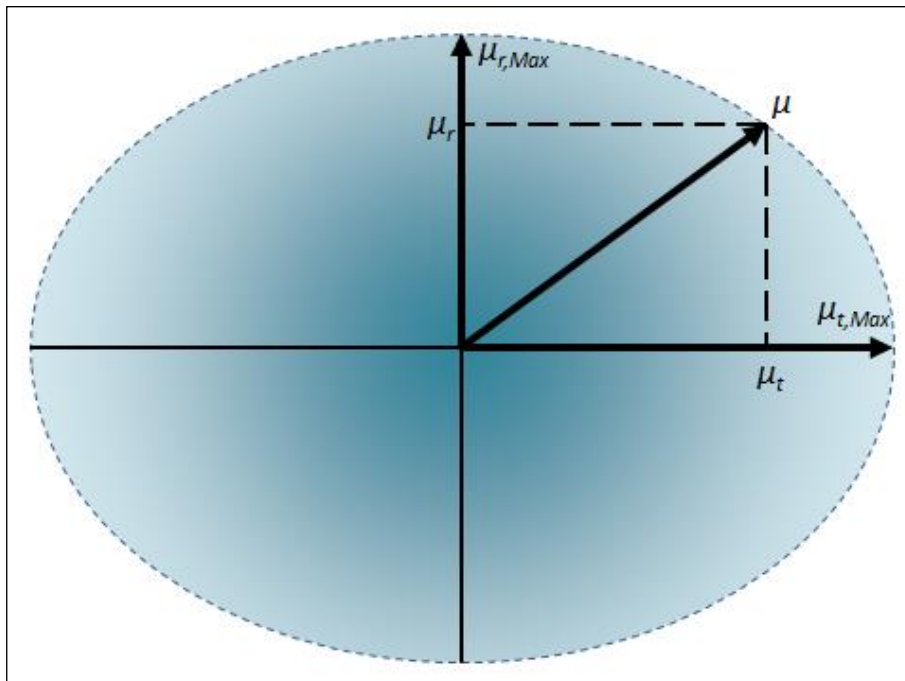
¹ Reelt er centrifugalkraften, som nævnt, imaginær, og den centripetale acceleration tilvejebringes i en kombination af tyngdekraftens radiale komponenter foranlediget af vejoverfladens tværfald og friktionskræfter, der aktiveres ved, at de styrende hjul ved kurvekørsel ikke er helt parallelle med kørselsretningens tangent.

μ_{Max} | er den friktionskoefficient [–], der maksimalt kan etableres i den aktuelle retning

Bemærk, at friktionskræfterne ikke nødvendigvis er ens i kontaktfladerne ved alle køretøjets dæk. For det første betyder køretøjets vægtfordeling, at der overføres forskellige normalkræfter gennem de forskellige aksler på køretøjet. Herudover virker trækkræften jo alene gennem de drivende hjul, og ved acceleration optræder der derfor større friktionskræfter ved disses dæk end ved de øvrige. Ved bremsning aktiveres friktionskræfter i alle dæks kontaktflader. Ved kørsel i en horisontalkurve vil der i alle dæk være påvirkninger på tværs af bevægelsesretningen; men påvirkningerne i de styrende hjuls dæk vil tillige rumme et bidrag, der skyldes, at disse hjul er drejet en smule, nemlig indslagsvinklen τ , i forhold til den retlinede bevægelse.

Oven i dette, må de modeller, der opstilles om friktionsegenskaberne, håndtere det forhold, at der er forskel på hvor stor friktion, der kan opnås tangentielt og radiale. Maksimalværdierne, der begrænser friktionskræfternes størrelse, afhænger blandt andet af dæk, vej og hastighed, og hastighedsafhængigheden er ikke ens i de to retninger.

Friktionsmodellerne må endvidere afspejle, at de to komponenter, F_{Ft} og F_{Fr} , der virker parallelt med hjulets bevægelsesretning henholdsvis vinkelret herpå, begrænser hinanden indbyrdes. Den maksimalt opnåelige tangentielle henholdsvis radiale friktion kan opfattes som de halve hovedakser i en såkaldt friktionsellipse, der



Figur 1. Friktionsellipsen – friktionskraftens komponenter på langs af henholdsvis på tværs af bevægelsesretningen begrænser gensidigt hinanden, idet den resulterende friktionskoefficient, μ , skal holde sig inden for den ellipse, der udspændes af den maksimale tangentielle og den maksimale radiale friktionskoefficient, $\mu_{t,Max}$ henholdsvis $\mu_{r,Max}$.

begrænser den resulterende friktions størrelse, jævnfør Figur 1.

Udformningen af bildæk betyder, at den største friktion kan opnås i det rullende dæks tangentielle retning, altså at det er $\mu_{t,Max}$ som udgør friktionsellipsens halve storakse.

Den indbyrdes afhængighed mellem de to friktionskomponenter, F_{Ft} og F_{Fr} , betyder, at den aktuelle, resulterende koefficient skal ligge inden for friktionsellipsen:

$$[10] \quad \left(\frac{f_t}{\mu_{t,Max}}\right)^2 + \left(\frac{f_r}{\mu_{r,Max}}\right)^2 \leq 1$$

... hvor:

f_t, f_r	er den aktuelle koefficient for den tangentielle henholdsvis den radiale friktionskomponent, og
$\mu_{t,Max}, \mu_{r,Max}$	
	er de maksimalt opnåelige friktionskoefficienter for de tilsvarende komponenter

Da friktionskoefficientens hastighedsafhængighed ikke er ens i de to hovedretninger, ændrer også fejlellipsens excentricitet sig med hastigheden.

I de vejgeometriske formler tages dog oftest udgangspunkt i en antagelse om, at den tilgængelige friktionskoefficient med rimelighed kan anses for at være ens i bevægelsens tangentielle og radiale retninger, altså at friktionsellipsens numeriske excentricitet er så lille, at ellipsen kan betragtes at være udartet til en cirkel. Dette medfører, at der om den resulterende koefficients to komponenter skal gælde:

$$[11] \quad \sqrt{f_t^2 + f_r^2} \leq \mu_T$$

... hvor:

μ_T | er den maksimale, totale friktionskoefficient

Det betyder, at det om størrelsen af den resulterende friktionskraft blot skal gælde:

$$[12] \quad |\mathbf{F}_{FT}| = \sqrt{|\mathbf{F}_{Ft}|^2 + |\mathbf{F}_{Fr}|^2} \leq \mu_T \cdot |\mathbf{F}_N|$$

Eksempel 2.F – Tilgængelig bremsefriktion

Givet: På en given vejstrækning og under givne forhold kan opnås en total friktionskoefficient på maksimalt $\mu_T = 0,37$. Bestem den største friktionskoefficient, der kan anvendes til opbremsning, når der optræder en sideacceleration på $g_r = 2,0 \text{ m/s}^2$, og når friktionsellipsen regnes cirkulær.

Løsning: Den optrædende sideaccelerationskoefficient, f_r , bestemmes:

$$f_r = \frac{g_r}{g} = \frac{2,0}{9,818} = 0,2$$

Når den optrædende sideaccelerationskoefficient skal opvejes af radiale friktionskræfter, bestemmes den søgte, tilgængelige (tangentielle) bremsefriktionskoefficient af formel [11]:

$$\mu_{br} = f_t = \sqrt{\mu_T^2 - f_r^2} = \sqrt{0,37^2 - 0,20^2} = 0,31 \quad \square$$

Størrelsen af den maksimale, totale friktionskoefficient, μ_T , er som nævnt hastighedsafhængig. Afhængigheden har været udtrykt som funktioner af lineær, eksponentiel og polynomial form.

De værdier, som findes af udtrykkene, gælder normale føreforhold. Der må derfor anlægges særlige vurderinger af friktionsforholdene under ugunstige forhold, fx på sne- eller isglatte veje.

I de nyeste danske vejregler (Vejdirektoratet, 2012a) antages ved opbremsning på en retlinet strækning med gode føreforhold en konstant deceleration på $g_d = 3,7 \text{ m/s}^2$, svarende til en konstant, resulterende, total friktionskoefficient på $\mu_T = 0,377$. I betragtningen indgår, at ikke alene friktionskoefficienten mellem dæk og vejoverflade er hastighedsafhængig, men også at bidragene fra køretøjets bremsesystem ændrer sig med varmeudviklingen under opbremsningen, så den samlede effekt gør det rimeligt at regne med en konstant værdi for den opnåelige deceleration.

Størrelsen af den radiale friktionskoefficient, f_r , der udnyttes, er under normale føreforhold begrænset, ikke af friktionsforholdene, men af komfortensyn, idet trafikanterne tilstræber ikke at udsætte sig selv for en sideaccelerationspåvirkning, der opleves som ubehagelig. Også denne begrænsning er hastighedsafhængig, jævnfør afsnit 4.4.

Eksempel 2.G – Friktionskoefficient I

Givet: I en ældre tysk vejregel (Borchardt, et al., 1979) angives friktionskoefficientens størrelse som et andengrads-polynomium, $\mu_T = A_\mu + B_\mu \cdot v + C_\mu \cdot v^2$, med parameterværdierne $A_\mu = 0,615$, $B_\mu = -2,304 \cdot 10^{-2} \text{ s/m}$ og $C_\mu = 2,773 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2/\text{m}^2$. Bestem størrelsen af friktionskoefficienten, μ_T , ved hastigheden $V = 54 \text{ km/h}$.

Løsning: Hastigheden omregnes fra km/h til m/s:

$$V = 54 \text{ km/h} = 54 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = 15 \text{ m/s} = v$$

Størrelsen af friktionskoefficienten bestemmes i dette tilfælde:

$$\begin{aligned}\mu_T &= A_\mu + B_\mu \cdot v + C_\mu \cdot v^2 \\ &= 0,615 - 2,304 \cdot 10^{-2} \cdot 15 + 2,773 \cdot 10^{-4} \cdot 15^2 \\ &= 0,615 - 0,346 + 0,062 = 0,331\end{aligned}$$

□

Eksempel 2.H – Friktionskoefficient II

Givet: Ældre, nu afløste danske vejregelforslag (Vejdirektoratet-Vejreglerådet, 1999a) (Vejdirektoratet-Vejreglerådet, 1999b) angiver ikke de aktuelle friktionskoefficienter, men tabellerer bremselængden og middelbremsefriktionskoefficienten, der optræder ved nedbremsning fra en given udgangshastighed til standsning. Værdierne kan med stor nøjagtighed frembringes ved at lade friktionskoefficienten have en eksponentiel afhængighed af hastigheden: $\mu_T = D_\mu \cdot \exp(E_\mu \cdot v)$, hvor parameterværdierne $D_\mu = 0,46$ og $E_\mu = -0,0205$. (Bolet, 2009). Bestem størrelsen af friktionskoefficienten, μ_T , ved hastigheden $V = 54 \text{ km/h}$.

Løsning: Hastigheden omregnes som ovenfor fra 54 km/h til 15 m/s:

Størrelsen af friktionskoefficienten bestemmes i dette tilfælde:

$$\mu_T = D_\mu \cdot e^{E_\mu \cdot v} = 0,46 \cdot e^{-0,0205 \cdot 15} = 0,338$$

□

2.7 Vejens normalreaktionskræfter, F_N

Vejbelægningen modvirker og udligner de kraftkomposanter, der er rettet vinkelret på vejoverfladen, med lige så store og modsat rettede reaktionskræfter, F_N [N]. Den samlede reaktionskraft fordeles på de fire hjul, og den kan opfattes som en kompenserende kraft. Det betyder, at normalreaktionen antager netop den størrelse, der er nødvendig for, at køretøjets hjul ikke skal synke ned i vejbelægningen.

Reaktionskraften etableres i vejbefæstelsen, idet køretøjets tryk- og stødbelastning fra dækkene fordeles gennem vejbelægningens lag, så den enten optages i befæstelsen eller bæres af underbunden. I forbindelse hermed kan der opstå forbigående eller blivende deformationer af befæstelsen og underbunden. Det at sikre, at vejbefæstelsen kan levere den nødvendige reaktionskraft til at optage kræfternes resulterende normalkomposant, er en opgave, der håndteres gennem dimensioneringen af vejbelægningen. I forbindelse med de kørselsdynamiske modeller er det underforstået, at denne opgave er løst tilfredsstillende.

2.8 Kraftlige vægt

Resultanten af alle de påvirkende kræfter, F_{RES} , virker i køretøjets tyngdepunkt og udligner summen af kræfterne. Da summen af vejoverfladens reaktionskræfter allerede har udbalanceret kraftpåvirkningerne vinkelret på vejoverfladen, ved vi, at F_{RES} må være parallel med vejoverfalden. Resultanten har til følge, at køretøjet accelererer eller decelererer:

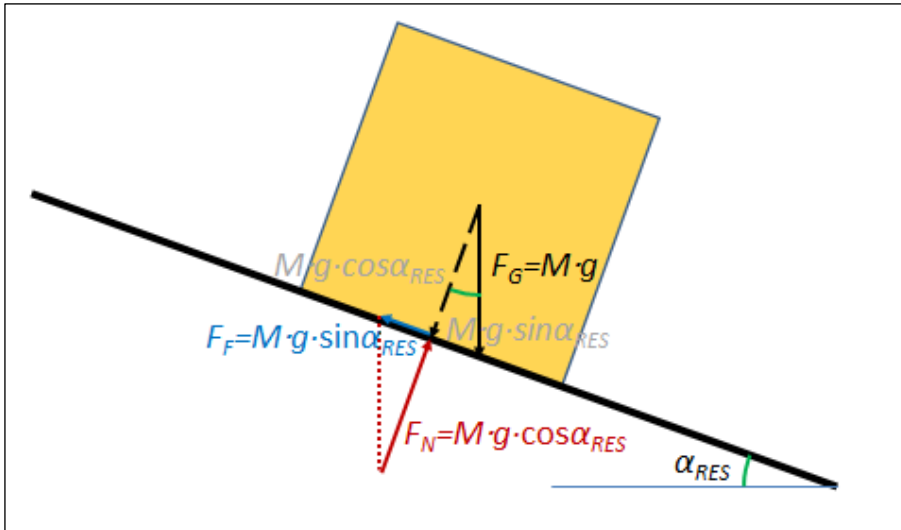
$$[13] \quad F_{RES} = k \cdot M \cdot \frac{dv}{dt}$$

... hvor:

k	er en parameter [–], der indregner, at ikke alene køretøjets masse $[M]$ ændrer hastighed, men også at køretøjets roterende dele i denne forbindelse ændrer rotationshastighed og derved binder eller frigør energi ¹
-----	--

I og med at de optrædende kræfter angriber køretøjet forskellige steder, nogle i tyngdepunktet, andre gennem kontaktfladen mellem dæk og vejoverflade, vil der oftest samtidigt optræde et moment. Momentet optages i køretøjets affjedringssystem. Herved fordeles normalreaktionskræfterne ujævnt mellem køretøjets højre og venstre hjulpar. Endvidere krænger køretøjet, så dets tyngdepunkt forskybtes.

¹ Størrelsen af k er tidligere ansat til 1,1 (Christiansen, 1944); men med den bedre køretøjsteknologi er værdien i dag betydelig nærmere 100 %.



Figur 2. Tyngdekraft, F_G , normalreaktionskraft, F_N , og friktionskraft, F_F , på et stift legeme, der hviler på en plan flade med hældning α_{RES} med vandret.

Bestemmelse af de kompenserende friktions- og normalreaktionskræfter har kraft- og momentligevægt som bærende princip. Princippet siger, at når køretøjet skal bevæge sig ved konstant hastighed, så skal der være kraftligevægt langs alle tre akser i det rumlige koordinatsystem, og når køretøjet ikke skal rotere, så skal der være momentligevægt om alle tre akser.¹

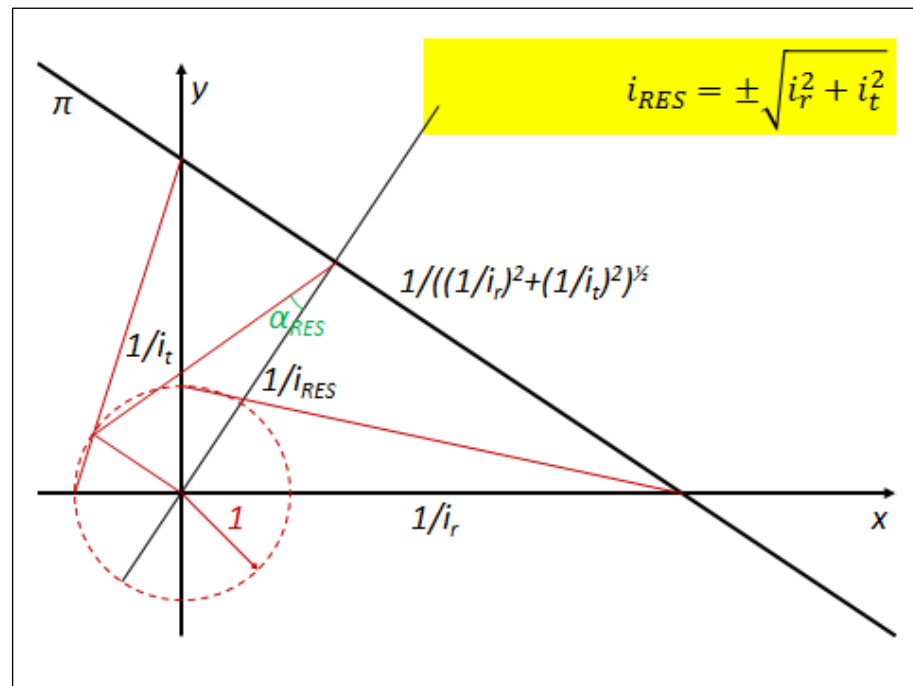
Vi vil se på, hvordan vi bestemmer størrelsen af de kompenserende kræfter, der virker på et køretøj, som holder stille på en plan vejoverflade. I dette tilfælde er centripetalkraften, F_C , luftmodstanden, F_L , rullemodstanden, F_R , og motorens trækraft, F_T , alle 0. Tyngdekraften, F_G , er altså den eneste drivende kraft. Køretøjet betragtes som stift; det betyder, at dets dele ikke bevæger sig indbyrdes som følge af momentpåvirkninger.

Figur 2 viser kræfterne på et stift legeme, der hviler på en plan flade med den resulterende hældning α_{RES} med vandret. Det ses, at tyngdekraften, F_G , kompenseres af en normalreaktionskraft, F_N , og en friktionskraft, F_F . Da den resulterende hældning ligger i papirets plan, er den hældende flades strygning normal til papiret, og der er derfor i dette tilfælde ingen kræfter, der virker vinkelret på papiret. Størrelserne af F_N , og F_F beregnes simpelt, som angivet.

Når to indbyrdes vinkelrette gradienter, $i_x = i_r$ og $i_y = i_b$, langs fladen er kendt, bestemmes den resulterende hældning, i_{RES} , jævnfør Figur 3, af:

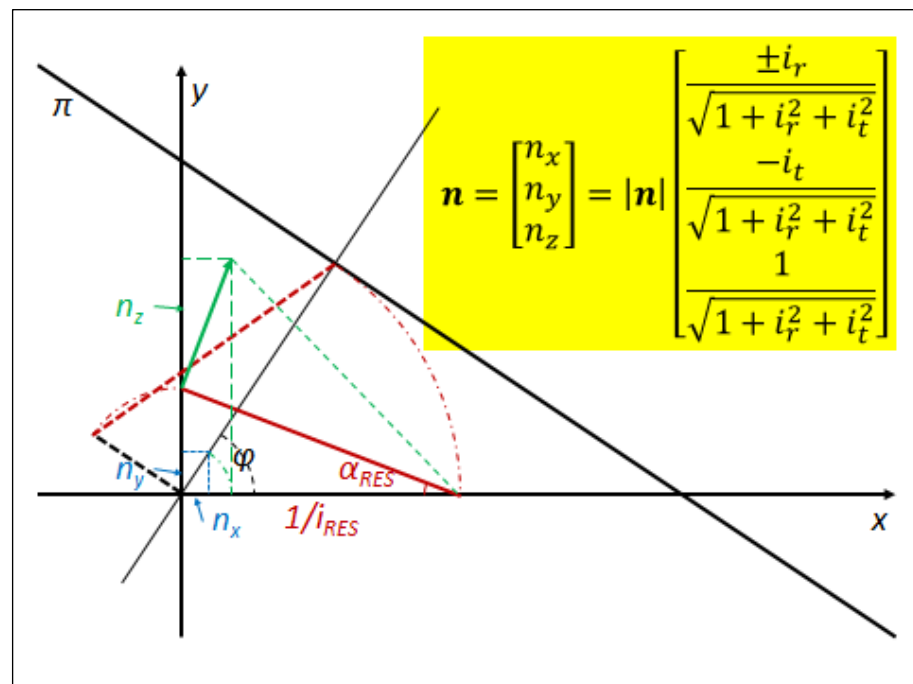
$$[14] \quad i_{RES} = \tan \alpha_{RES} = \sqrt{i_r^2 + i_b^2}$$

¹ Christiansen (1944) betragter ligevægten i et rumligt kraftsystem, hvor også momenterne tages i regning.



Figur 3. Den hældende plan har sporet π i den vandrette xy -plan. Den resulterende hældning står vinkelret på sporet. Når radial- og tangential-gradienterne, i_r og i_t , kendes, kan den resulterende, gradient i_{RES} , bestemmes. Formlen kan fx udledes ved at bestemme den store trekants areal, dels ud fra kateterne, dels ud fra hypotenusen og højden.

Et lodret plan, der rummer fladens resulterende gradient, har i det vandrette plan et spor, der danner vinklen φ med x -aksen, jævnfør Figur 4. Størrelsen af φ er fastlagt ved:



Figur 4. Geometrisk konstruktion af opløsningen af en normalvektor, n , til en hældende flade i vektorens komponenter i de tre akseretninger. Situationen er som vist i Figur 3, idet π betegner fladens spor i vandret, og idet fladen har radial gradient $i_x = i_r$, tangential gradient $i_y = i_t$ og resulterende gradient i_{RES} .

$$[15] \quad \begin{aligned} \cos \varphi &= \left| \frac{1/i_{RES}}{1/i_r} \right| = \left| \frac{i_r}{i_{RES}} \right| \\ \sin \varphi &= \left| \frac{1/i_{RES}}{1/i_t} \right| = \left| \frac{i_t}{i_{RES}} \right| \end{aligned}$$

For en normalvektor, \mathbf{n} , til den hældende plan gælder, jævnfør Figur 2, at den har en lodret komponent i z -retningen og en vandret komponent i xy -planets φ -retning. Sidstnævnte kan, jævnfør Figur 4, opløses i x - henholdsvis y -retningen:

$$[16] \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = |\mathbf{n}| \begin{bmatrix} \cos \varphi \cdot \sin \alpha_{RES} \\ \sin \varphi \cdot \sin \alpha_{RES} \\ \cos \alpha_{RES} \end{bmatrix} = |\mathbf{n}| \begin{bmatrix} \left| \frac{i_r}{i_{RES}} \right| \cdot \frac{\tan \alpha_{RES}}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha_{RES}}} \\ \left| \frac{i_t}{i_{RES}} \right| \cdot \frac{\tan \alpha_{RES}}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha_{RES}}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha_{RES}}} \end{bmatrix}$$

$$= |\mathbf{n}| \begin{bmatrix} \frac{\pm i_r}{\sqrt{1+i_r^2+i_t^2}} \\ \frac{-i_t}{\sqrt{1+i_r^2+i_t^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+i_r^2+i_t^2}} \end{bmatrix}$$

... hvor x -komponentens fortegn er plus, når fladen falder i x -aksens positive retning, og minus, når fladen falder i aksens negative retning.

Opløses på tilsvarende vis en vektor, \mathbf{e} , der ligger i den hældende flade og følger fladens gradient, i x -, y - og z -komponenter, findes:

$$[17] \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = |\mathbf{e}| \begin{bmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \alpha_{RES} \\ \sin \varphi \cdot \cos \alpha_{RES} \\ \sin \alpha_{RES} \end{bmatrix} = |\mathbf{e}| \begin{bmatrix} \left| \frac{i_r}{i_{RES}} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha_{RES}}} \\ \left| \frac{i_t}{i_{RES}} \right| \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha_{RES}}} \\ \frac{\tan \alpha_{RES}}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha_{RES}}} \end{bmatrix}$$

$$= |\mathbf{e}| \begin{bmatrix} \pm \frac{i_r}{\sqrt{i_r^2+i_t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+i_r^2+i_t^2}} \\ \pm \frac{i_t}{\sqrt{i_r^2+i_t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+i_r^2+i_t^2}} \\ \pm \frac{\sqrt{i_r^2+i_t^2}}{\sqrt{1+i_r^2+i_t^2}} \end{bmatrix}$$

... hvor fortegnene skal vælges under hensyntagen til fladens hældning og vektorens orientering på fladen.

I såvel formel [16] som formel [17] optræder dividenden $\sqrt{(1 + i_r^2 + i_t^2)}$. Denne negligeres oftest for at forenkle beregningerne. Hvor stor en fejl, vi herved gør, afhænger selvfølgelig af størrelsen af de to gradienter. Hvis den resulterende gradient er mindre end 70 %, således som det anbefales i de danske vejregler,

så antager dividenden en størrelse, der er mindre end 1,0024..., og udeladelsen giver altså anledning til en forvanskning, der er mindre en 2,5 ‰. Denne forvanskning er i reglen acceptabel i praksis; men den betinger naturligvis, at vi ikke forledes til at søge en større nøjagtighed i de videre beregninger.

Vender vi tilbage til Figur 2, ser vi, at vi kan finde koordinatsætterne til de kompenserende kræfter ved at erstatte \mathbf{n} og \mathbf{e} med \mathbf{F}_N henholdsvis \mathbf{F}_F i formel [16] og [17]. Negligerer vi forvanskningen, finder vi:

$$[18] \quad \mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} F_{Nx} \\ F_{Ny} \\ F_{Nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm M \cdot g \cdot i_r \\ -M \cdot g \cdot i_t \\ M \cdot g \end{bmatrix}$$

$$[19] \quad \mathbf{F}_F = \begin{bmatrix} F_{Fx} \\ F_{Fy} \\ F_{Fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm M \cdot g \cdot i_r \cdot \frac{i_r}{\sqrt{i_r^2 + i_t^2}} \\ \pm M \cdot g \cdot i_t \cdot \frac{i_t}{\sqrt{i_r^2 + i_t^2}} \\ \pm M \cdot g \cdot \sqrt{i_r^2 + i_t^2} \end{bmatrix}$$

2.9 Opgaver

A. Find formler, der viser, hvordan luftens densitet varierer afhængigt af lufttrykket, temperaturen og af luftfugtigheden. Beregn værdier, der illustrerer variationen svarende til det interval, de uafhængige parametre typisk bevæger sig inden for i Danmark, fx for temperaturerne: -10 °C, 0 °C, 10 °C, 20 °C og 30 °C. □

B. Foretag søgning på repræsentative værdier af rullemodstandskoefficienten, μ_R , gældende forskellige belægningstyper og føreforhold. Angiv udtømmende referencer. □

C. Foretag søgning på fem typiske lastbilers ydeevne. Omregn fabrikanternes oplysninger til effekt pr. (tilladt) masse [W/kg]. Angiv udtømmende referencer. □



3 KØRSELDYNAMIK

3.1 Kørseldynamiske mål

Vejudformningen, tracéet og tværprofilet, skal gøre det muligt for trafikanterne at færdes sikkert og komfortabelt ved den forudsatte hastighed for vejstrækningen. Dette indebærer blandt andet:

- At der ikke er risiko for, at køretøjet vælter eller glider af vejen.
- At der ikke optræder højdeforskelle, som køretøjet ikke kan overvinde.
- At trafikanten ikke bliver udsat for påvirkninger i form af accelerationer og ryk, der er ukomfortable.
- At trafikanten kan opfatte en eventuel hindring på kørebanelen så betids, at det er muligt at bringe køretøjet til standsning – eller at undvige.
- At to modkørende trafikanter i samme spor kan opfatte hinanden så betids, at det er muligt at bringe køretøjerne til standsning.
- At trafikanten, hvor der skal være overhalingsmulighed, kan opfatte eventuelle hindringer eller modkørende trafik på den aktuelle delstrækning så betids, at det er muligt enten at fuldføre eller at afbryde overhalingsmanøvren.

Her er tale om at, vejudformningen skal tilgodese grundlæggende fysiske sammenhænge, der optræder, når et køretøj færdes på en vej. Disse sammenhænge vedrører navnlig kraftpåvirkningerne på køretøjet. De udtrykkes gennem simple modeller fra den klassiske mekaniske fysik, og med ligeledes simple modeller for trafikanternes adfærd.

I det følgende forudsætter vi, at det er fastlagt, hvilken vejtype, vi skal projekttere, og hvilken planlægningshastighed og dimensioneringshastighed, vejen skal projekteres for.¹

3.2 Forudsætninger og virkelighed

Kørseldynamikken beskæftiger sig med de kraftpåvirkninger, der optræder, når et køretøj færdes på en vej. Det sker gennem relativt simple modeller og under nogle gjorte forudsætninger.

¹ Om hastighedsbegreberne se undervisningsnoten *Vejstrækningers geometri – Tracering* (Bolet & Kjems, 2015).

De grundlæggende forudsætninger angår køretøjets dimensioner (fx længde, bredde og højde) og ydeevne (fx svingradius og trækraft). Forudsætningerne angår endvidere egenskaber ved vejoverfladen (fx friktion). Endelig angår forudsætningerne trafikanternes præstationsevner (fx reaktionstider) og komfortkrav (fx tolerance over for ryk).

Fælles for de fastlagte forudsætninger gælder, at modellerne traditionelt arbejder deterministisk med standardiserede værdier, der forsøger at give et sanddru billede af virkeligheden. Nogle værdier kan være valgt til den »sikre« side, men er dog realistiske.

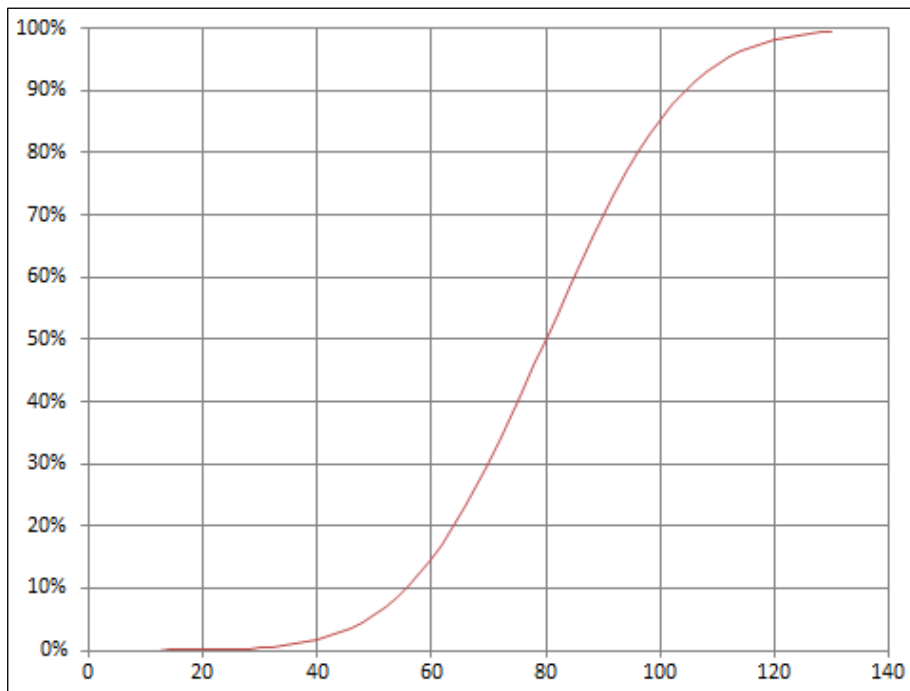
Nogle af de værdier, der anvendes som forudsætninger, er fremkommet på grundlag af statistikker eller er udtrykt gennem krav i lovgivningen. Herved er det, i alle fald formelt, sikret, at forudsætningerne er opfyldt eller ikke overskrides. Fx stiller *dimensionsbekendtgørelsen*, (Transportministeriet, 2011), der er udsendt i medfør af færdselsloven, krav til køretøjernes størrelse og vægt.

Andre værdier sikres tilvejebragt gennem krav til vejens udformning og udførelse og ved krav til de anvendte materialer. Fx stiller vejbestyrelserne gennem udbudsmaterialet krav om den friktion, som det under standardiserede forhold er muligt at måle på en nyudlagt vejoverflade. Denne målte friktionsværdi er ikke den samme som den, der optræder under kørsel, men der er empirisk belæg for, at vejbelægningens friktionsegenskaber lever op til de kørselsdynamiske modellers forudsætninger, når den målte friktionsværdi opfylder de krav, der stilles gennem de standardiserede bestemmelser i vejreglernes udbudsforskrifter.

Atter andre værdier baserer sig på forsøg eller observationer og på analyser af samt modeller til beskrivelse af trafikanternes adfærd og af trafikulykker.

De fysiske forudsætninger er ikke evigtgyldige konstanter, men udvikler sig gradvist. Eksempelvis ændrer trafikanternes aldersmæssige sammensætning og adfærd sig over tiden. Også køretøjsparken ændrer sig, og køretøjerne forsynes med indretninger, der giver stedse bedre køreegenskaber. Endelig dannes der løbende, såvel i Danmark som i udlandet, ny viden, som må vurderes, eftervises og inddrages i arbejdsgrundlaget.

Hvor det er muligt at give en rimelig beskrivelse af en fordeling for en parameter, kan denne fordeling lægges til grund. I de tilfælde, hvor flere parametre samvirker, er det ofte praksis, at man for den enkelte parameter baserer sig på den værdi, der tilgodeser 85 % af hændelserne, jævnfør Figur 5. Risikoen for, at to uafhængige parametre samtidigt falder ugunstigt ud, er 2 %. Da der i reglen er fire eller flere grundparametre, der samvirker, gør man den antagelse, at det er lidet sandsynligt, at alle parametre samtidigt vil overskride den valgte grænse. Det betyder, at man har valgt at forvente, at det samlede udfald ikke vil give problemer.



Figur 5. Når fordelingerne for de fysiske forudsætninger, der indgår i den kørselsdynamiske model, kan beskrives, vil man ofte basere sig på værdier, der tilgodeser 85 % af de enkelte værdier. Eksemplet viser en normalfordeling med middelværdi 80 og spredning 20, svarende til at 85 %-fraktilen er cirka 100.

Hovedreglen er, at der i vejgeometrien arbejdes direkte med de fastlagte værdier. Sikkerheden er tilgodeset gennem selve fastlæggelsen af værdierne for de fysiske forudsætninger. Der arbejdes altså *ikke* med partialkoefficienter, således som det er kendt fra blandt andet bygningsstatikken. Der arbejdes *heller ikke* med stokastiske modeller til at indbygge eller vurdere en sikkerhed i de valgte vejgeometriske løsninger gennem simulering, således som det fx sker i modellerne til kapacitetsvurderinger og til dimensionering af vejbefæstelser.

3.3 Opgaver

- A. Opstil en oversigt, der viser de belastningsbegrænsninger, der i Danmark gælder for køretøjer. *Tip: Søg på »dimensionsbekendtgørelsen« i www.retsinformation.dk.* ☐
- B. Redegør for kørselsdynamikken for en motorcykel, der kører i en dødsdrom. ☐
- C. Bestem din gennemsnits-ganghastighed. Sammenlign resultatet med de værdier der angives i de danske vejregelforslag. Hvad kan årsagen til en eventuel forskel være? ☐
- D. Undersøg hvilke forudsætninger, vejreglerne har gjort om indfletningshastigheden ved konvergensnittet i en tilkørselsrampe til en motorvej, og diskuter hvilke konsekvenser dette har for fastlæggelsen af rampelængden. Belys tilsvarende forudsætninger og konsekvenser, der knytter sig til udfletningshastigheden i konvergensnittet, hvor et køretøj forlader motorvejen ad en frakørselsrampe. ☐

4 KURVEKØRSEL

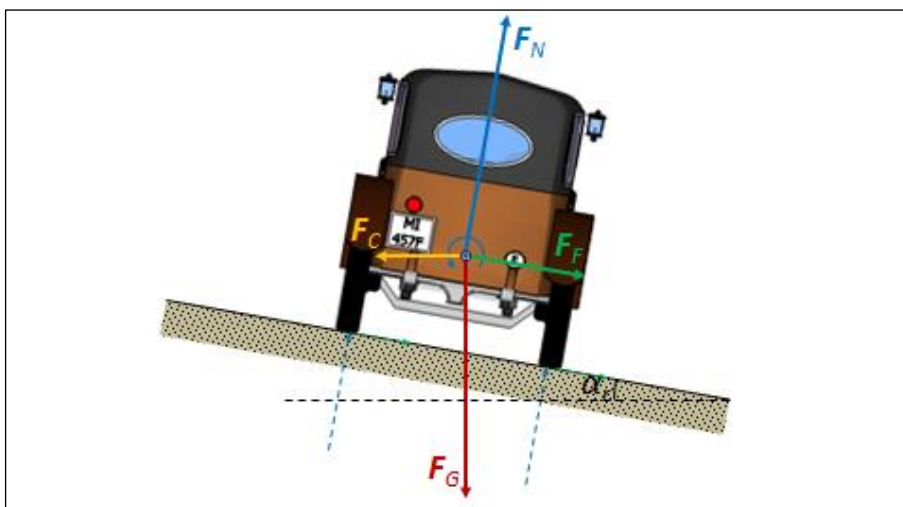
4.1 Situationen ved kørsel i en kurve

Vi betragter den situation, hvor et automobil kører med en given hastighed, v , i en vandret horisontalkurve med en given kurveradius, R_h , og med en vejoverflade med en given sidehældning, $i_r = \tan \alpha_r$. Vi gør den simplificerende forudsætning, at køretøjets tyngdepunktskurve følger linjeføringens horisontalkurve.

Det dynamiske krav er, at et køretøj med konstant hastighed skal kunne gennemkøre vejen uden at komme i fare for at vælte eller skride ud. Herudover er det et krav, at trafikanten skal opfatte kørslen som komfortabel.

De kræfter, der påvirker køretøjet i tværsnitsplanet, altså vinkelret på bevægelsesretningen, er, jævnfør Figur 6, den lodrette tyngdekraft, F_G , den vandret virkende centripetalkraft, F_C , samt vejbelægningens resulterende reaktionskraft, F_N , og en overfladeparallel resultant, F_E , der i dette tilfælde er den resulterende friktionskraft. Da normal- og friktionskræfterne virker i kontaktfladerne mellem dæk og vejoverflade, optræder endvidere et krængende moment om køretøjets y -akse.

Ligevægtsligningerne er, for så vidt angår de normale og de radiale kræfter som angivet i udtryk [20] henholdsvis udtryk [21]:



Figur 6. Kraftpåvirkningen på et køretøj i bevægelse gennem en vandret kurve med sidegradient $i_r = \tan \alpha_r$. Ud over tyngdekraften, F_G , betragtes centripetalkraftens modkraft, F_C , de radiale friktionskræfter mellem dæk og vejoverfladen, $F_F = F_E$ samt vejbefæstelsens normalkraft, F_N . Når kræfterne henføres til køretøjets tyngdepunkt, \oplus , optræder endvidere et krængende moment.

$$[20] \quad F_N = M \cdot g \cdot \cos \alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{R_h} \cdot \sin \alpha_r$$

$$[21] \quad F_E = -M \cdot g \cdot \sin \alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{R_h} \cdot \cos \alpha_r$$

... hvor:

M	er køretøjets masse [kg],
g	er tyngdeaccelerationen [m/s^2],
α_r	er vinklen mellem det vandrette plan og vejoverfladen i tværsnittet; $\tan \alpha_r = i_r$,
v	er køretøjets hastighed [m/s] og
R_h	er den øjeblikkelige kurveradius [m]

4.2 Væltning

For at et firehjulet køretøj ikke skal vælte, kræves det, at resultanten af normal- og tangentialkræfterne falder inden for det rektangel, der begrænses af køretøjets hjul. Risikoen herfor øges, hvis køretøjets dæk og affjedring tillader stor krængning, eller hvis køretøjet er lastet skævt. Disse faktorer kan reducere køretøjets krængningsstabilitet med op til 40 % (Winkler & Ervin, 1999).

Med den udformning, køretøjer har i dag, og med de krav, der stilles til sikkerhed mod skridning og til komfort, vil det kun være i helt specielle tilfælde, at køretøjet vælter, fx ved dubiøst store læs med højtliggende tyngdepunkt samt ved høje, lette køretøjer, der samtidig er udsat for kraftig sidevind. Hertil kommer situationer, hvor en anhænger under kørsel med for høj hastighed kommer i så kraftige sideværts svingninger, at krængningsstabiliteten bliver utilstrækkelig.

Et tohjulet køretøj har ikke samme mulighed for at fordele kræfterne mellem højre og venstre hjulsæt. I stedet må trafikanten på det tohjulede køretøj sikre ligevægt ved at krænge sit køretøj, så der er momentligevægt om kontaktpunktet mellem dæk og kørebaneoverflade.

4.3 Udskridning

Hvis køretøjet ikke skal skride ud, kræves det, at der kan etableres en sideværts friktionskraft, som er mindst lige så stor som radialkraften. Sammenholdes udtrykkene [20] og [21] med udtryk [9] fås uligheden:

$$\begin{aligned}
 [22] \quad F_E &= F_F = -M \cdot g \cdot \sin \alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{R_h} \cdot \cos \alpha_r \\
 &= f_r \cdot \left(M \cdot g \cdot \cos \alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{R_h} \cdot \sin \alpha_r \right) \\
 &\leq \mu_{r, \max} \cdot \left(M \cdot g \cdot \cos \alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{R_h} \cdot \sin \alpha_r \right) = \mu_r \cdot F_N
 \end{aligned}$$

... hvor:

$\mu_{r,Max}$ | er den maksimale sidefriktionskoefficient, der kan tilvejebringes mellem vejoverfladen og køretøjets dæk, og
 f_r | er den udnyttede sidefriktionskoefficient mellem vejoverfladen og køretøjets dæk, altså et tal i intervallet $[0; \mu_r]$

Isoleres størrelsen f_r fås uligheden:

$$\begin{aligned}
 [23] \quad f_r &= \frac{-M \cdot g \cdot \sin \alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{R_h} \cos \alpha_r}{M \cdot g \cdot \cos \alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{R_h} \sin \alpha_r} = \frac{-\tan \alpha_r + \frac{v^2}{g \cdot R_h}}{1 + \frac{v^2}{g \cdot R_h} \tan \alpha_r} = \frac{-i_r + \frac{v^2}{g \cdot R_h}}{1 + \frac{v^2}{g \cdot R_h} i_r} \\
 &\approx \frac{v^2}{g \cdot R_h} - i_r
 \end{aligned}$$

Tilnærmelsen er acceptabel, fordi kørebanens hældningsvinkel, α_r , og dermed sidehældningen, i_r , i praksis altid er lille, ligesom talstørrelsen af kurveradius, R_h , er stor i sammenligning med talstørrelsen for hastigheden.

Isoleres i stedet kurveradien, R_h , findes det kørselsdynamiske minimumskrav til horisontalkurvers radius:

$$[24] \quad R_h \geq \frac{v^2 \cdot (1 - \mu_{r,Max} \cdot i_r)}{g \cdot (\mu_{r,Max} + i_r)} \approx \frac{v^2}{g \cdot (\mu_{r,Max} + i_r)}$$

Også her er tilnærmelsen acceptabel, fordi kørebanens hældningsvinkel, α_r , og dermed sidehældningen, i_r , i praksis altid er lille, hvorfor vi kan regne leddet $(1 - \mu_{r,Max} \cdot i_r) \approx 1$.

Indsætter vi værdien af tyngdeaccelerationen, og anvender vi talstørrelsen for hastigheden udtrykt i km/h; fremkommer følgende krav til horisontalkurveradius udtrykt i meter:

$$[25] \quad R_h \geq \frac{v^2}{(3,6)^2 \cdot 9,818 \cdot (\mu_{r,Max} + i_r)} \approx \frac{v^2}{127 \cdot (\mu_{r,Max} + i_r)} \text{ [m]}$$

Eksempel 4.A – Nødvendig sidefriktion

Givet: En bil kører med hastigheden $V = 108 \text{ km/h}$ gennem en vandret horisontalkurve med radius $R_h = 200 \text{ m}$ og sidegradient $i_r = 40 \text{ ‰}$ med fald mod kurvens centrum. Bestem den sidefriktionskoefficient, som kørslen kræver, og kommenter resultatet.

Løsning: Hastigheden omregnes fra km/h til m/s:

$$V = 108 \text{ km/h} = 108 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = 30 \text{ m/s} = v$$

Størrelsen af den nødvendige sidefriktionskoefficient bestemmes af [23]:

$$f_r = \frac{v^2}{g \cdot R_h} - i_r = \frac{30^2}{9,818 \cdot 200} - 0,040 = 0,458 - 0,040 = 0,42$$

Størrelsen ligger over den friktionskoefficient, der kan påregnes mellem hjul og vejbelægning (jævnfør efterfølgende afsnit). Derfor er løsningen ikke forsvarlig. Enten må hastigheden sænkes, eller også må horisontalkurveradius eller sidegradient øges. □

Hvad angår et tohjulet køretøj, kan kriteriet om udskridning kontrolleres ved at se på momentligevægt om køretøjets tyngdepunkt. Også her er det afgørende, at det er muligt at tilvejebringe den nødvendige sidefriktionskoefficient mellem dæk og vejoverflade.

Eksempel 4.B – Væltning og udskridning af tohjulet køretøj

Givet: En motorcyklist kører med hastigheden $V = 72 \text{ km/h}$ gennem en vandret horisontalkurve med radius $R_h = 100 \text{ m}$ og sidegradient $i_r = 60 \text{ ‰}$ med fald mod kurvens centrum. Bestem motorcyklens krængning, β , i grader i forhold til lodret. Bestem den nødvendige sidefriktionskoefficient under kurvekørslen. Kommenter resultatet.

Løsning: Vejoverfladens vinkel med vandret bestemmes til $\alpha = \tan^{-1} i_r = \tan^{-1} 0,060 = 0,0599 \text{ rad} = 3,43^\circ$. Vi lader M betegne motorcyklens masse og h betegne afstanden mellem tyngdepunktet og vejoverfladen, når motorcyklen ikke er krænget. Normalreaktionskraften og friktionskraften virker i kontaktpunktet mellem dæk og vej. Momentligevægt herom indebærer derfor:

$$0 = h \cdot \cos \beta \cdot \frac{M \cdot v^2}{R_h} - h \cdot \sin \beta \cdot M \cdot g \Leftrightarrow$$

$$\tan \beta = \frac{v^2}{g \cdot R_h} \Leftrightarrow$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{v^2}{g \cdot R_h} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \tan^{-1} \frac{\left(\frac{72}{3,6}\right)^2}{9,818 \cdot 100} = 22,17^\circ$$

Vi lader F_N betegne normalreaktionskraften og $F_F = \mu \cdot F_N$ friktionskraften, hvor μ angiver den aktuelt udnyttede friktionskoefficient. Tyngdekraften og centrifugalkraften virker i tyngdepunktet. Momentligevægt herom indebærer derfor:

$$0 = h \cdot \cos(\beta - \alpha) \cdot \mu \cdot F_N - h \cdot \sin(\beta - \alpha) \cdot F_N \Leftrightarrow$$

$$\mu = \tan(\beta - \alpha) = \tan(22,17^\circ - 3,43^\circ) = 0,34$$

Nipstillingen, hvor motorcyklisten netop ikke skrider ud, fordrer altså en nødvendig friktionskoefficient på $\mu = 0,34$. Størrelsen kan påregnes at være tilgodeset ved kørsel med gode dæk på en god vejbelægning i godt føre. \square

4.4 Komfortabel kurvekørsel

Hensynet til trafikantens og passagerernes komfort betyder, at der er grænser for, hvor stor en sideacceleration, de må opleve. Den sideacceleration, som centripetalkraften, F_C , påvirker trafikanten med, kompenseres på grund af vejbanens overhøjde delvis af normalreaktionsaccelerationens vandrette komponent. Dette forudsætter selvfølgelig, at overhøjden har korrekt fortegn, dvs. at vejoverfladen hælder ind mod kurvens centrum – i modsat fald forstærker normalreaktionskraftens vandrette komponent trafikantens oplevelse af den centrifugale acceleration. Den samlede vandrette sideacceleration, g_x , som virker på trafikanten, har derfor størrelsen:

$$\begin{aligned} [26] \quad |g_x| &= \pm \left[-\frac{1}{M} \cdot (F_C - F_N \cdot \sin \alpha_r) \right] \\ &= \pm \left[-\frac{1}{M} \cdot \left(M \cdot \frac{v^2}{R_h} - \left(M \cdot g \cdot \cos \alpha_r + M \cdot \frac{v^2}{R_h} \cdot \sin \alpha_r \right) \cdot \sin \alpha_r \right) \right] \\ &= \mp \left[\frac{v^2}{R_h} \cdot \cos^2 \alpha_r - g \cdot \cos \alpha_r \cdot \sin \alpha_r \right] \\ &\approx \mp \left[\frac{v^2}{R_h} \cdot -g \cdot \tan \alpha_r \right] = \mp \left[\frac{v^2}{R_h} \cdot -g \cdot i_r \right] \end{aligned}$$

... hvor

M | er køretøjets masse [kg],

g	er tyngdeaccelerationen [m/s ²],
i_r	er sidegradienten [‰],
α_r	er vinklen mellem det vandrette plan og vejoverfladen i tværsnittet; $\tan\alpha_r = i_r$,
v	er køretøjets hastighed [m/s],
R_h	er den øjeblikkelige kurveradius [m]

... og hvor fortegnet beror på om kurven er højre- eller venstre-drejende.

Tilnærmelsen er acceptabel, fordi kørebanens hældningsvinkel, α_r , er lille, således at $\sin\alpha_r \approx \tan\alpha_r = i_r$, og således at $\cos\alpha_r \approx 1$.

Hensynet til trafikant og passagerer betyder, at der er grænser for, hvor stor den resulterende (ukompenserede) sideacceleration, g_r , må blive. Det gælder derfor, jævnfør udtryk [26], at:

$$[27] \quad f_{r,till} \geq \frac{g_r}{g} \approx \frac{v^2}{g \cdot R_h} \cdot -i_r$$

... hvor:

$f_{r,till}$ | betegnes den tilladelige sideaccelerationskoefficient [–]

Isoleres kurveradien findes minimumskravet:

$$[28] \quad R_h \geq \frac{v^2 \cdot (1 - f_{r,till} \cdot i_r)}{g \cdot (f_{r,till} + i_r)} \approx \frac{v^2}{g \cdot (f_{r,till} + i_r)}$$

Indsættes værdien af tyngdeaccelerationen, og anvendes talstørrelsen for hastigheden udtrykt i km/h indgår; fremkommer følgende krav til horisontalkurveradius udtrykt i meter:

$$[29] \quad R_h \geq \frac{v^2}{(3,6)^2 \cdot 9,818 \cdot (f_{r,till} + i_r)} \approx \frac{v^2}{127 \cdot (f_{r,till} + i_r)} \text{ [m]}$$

Størrelsen af den tilladelige sideaccelerationskoefficient, $f_{r,till}$, er, ligesom friktionskoefficienten, hastighedsafhængig og udtrykkes i reglen som funktioner af lineær, eksponentiel og polynomial form.

En sammenligning af udtrykkene [24] og [28] efterlader spørgsmålet om hvilket af de to hensyn, der er stærkest, altså om μ_r eller $f_{r,till}$ er mindst. I projekteringssituationen, hvor der ses på kørsel under normale vej- og føreforhold, er det den tilladelige, resulterende (ukompenserede) sideaccelerationskoefficient, $f_{r,till}$, der er udslagsgivende.

Under ekstreme vej- og føreforhold, fx ved kørsel på is- eller snebelagte veje eller på veje med aquaplanning, vil den friktionskoefficient, μ_r , der kan etableres mellem køretøjets hjul og vejoverfladen, imidlertid ikke kunne nå samme størrelse som den komfortfastsatte, tilladelige sideaccelerationskoefficient. Under sådanne forhold må trafikanten afpasse sin hastighed til de aktuelle forhold.

Eksempel 4.C – Tilladt sideaccelerationskoefficient

Givet: De danske vejregler (Vejdirektoratet, 2012a) angiver den tilladte sideaccelerationskoefficient som en eksponentiel funktion: $f_{r,till} = 0,28 \cdot \exp(-0,0096 \cdot V_d)$, hvor dimensioneringshastigheden, V_d , er indsat i km/h.

Bestem $f_{r,till}$ hastigheden $v_d = 25$ m/s.

Løsning: Hastigheden omregnes i dette tilfælde fra m/s til km/h:

$$v = 25 \text{ m/s} = 25 \cdot \frac{3600}{1000} \text{ km/h} = 90 \text{ km/h} = V$$

Sideaccelerationskoefficienten bestemmes:

$$f_{r,till} = D \cdot e^{E \cdot V} = 0,28 \cdot e^{-0,0096 \cdot V_d} = 0,28 \cdot 0,422 = 0,12 \quad \square$$

4.5 Frihåndshastighed og compensationfaktor

For enhver vejstrækning med en given kurveradius, R_h , og en given, korrekt vendt, sidehældning, i_r , eksisterer en hastighed, hvor den centrifugalkraft, som trafikanten oplever, netop kompenseres fuldt ud af tyngdekraftens tangentielle komponent, altså hvor den oplevede, resulterende sideacceleration er 0. Denne hastighed betegnes frihåndshastigheden, v_{fri} [m/s]:

$$[30] \quad v_{fri} = \sqrt{g \cdot i_r \cdot R_h}$$

Ved hastigheder, der er større end v_{fri} , oplever trafikanten, at køretøjet påvirkes af en resulterende acceleration væk fra kurvecentrum. Ved hastigheder, der er mindre end v_{fri} , opleves den resulterende acceleration derimod som virkende mod kurvens centrum. Her må trafikanten kompensere ved at dreje rattet modsat kurveretningen, hvilket opleves unormalt.

Det bør undgås, at der hyppigt optræder hastigheder, der er mindre end frihåndshastigheden, v_{fri} . Det kan modvirkes ved at søge at mindske sidehældningen mod til gengæld at øge horisontalkurvens radius.

Omvendt gælder det, at i ekstremssituationen, hvor vejen er meget glat, $\mu_r \approx 0$, skal tyngdeaccelerationens tangentielle komponent udbalancere hele centripetalkraften. Dette leder til, at al færdslen i denne situation bør afvikles ved frihåndshastigheden.

Udtrykkene [24] og [28] kan omskrives:

$$[31] \quad R_h \geq K \cdot \frac{v^2}{g \cdot i_r}$$

... hvor K betegnes kompensationsfaktoren [–], der fastlægges:

$$[32] \quad K = \frac{i_r}{i_r + \min(\mu_r; f_{r,till})}$$

Vi kan opfatte kompensationsfaktoren som en reduktionsfaktor for den hastighed, v , som vejen udformes for. Betragtes situationen i normalt føre, hvor $\mu_r > f_{r,till}$, kan frihåndshastigheden udtrykkes:

$$[33] \quad v_{fri} = v \cdot \sqrt{K}$$

idet sideaccelerationen, g_r , ved denne hastighed, jævnfør [30], vil være:

$$\begin{aligned}
 [34] \quad g_r &= \frac{v_{fri}^2}{R_h} - g \cdot i_r = \frac{v^2}{R_h} \cdot \frac{i_r}{i_r + f_{r,till}} - g \cdot i_r \\
 &= \frac{v^2}{\frac{v^2}{g \cdot (i_r + f_{r,till})}} \cdot \frac{i_r}{i_r + f_{r,till}} - g \cdot i_r = g \cdot i_r - g \cdot i_r = 0
 \end{aligned}$$

I praksis kan vi derfor fastsætte et mindste sidefald ud fra kendskab til den maksimalt tilladelige sideaccelerationskoefficient ved den givne hastighed:

$$[35] \quad i_r \geq \frac{K}{1-K} \cdot f_{r,till}$$

... idet sidefaldet, i_r , tillige er bundet i et interval fastsat dels af hensyn til sikring af regnvandsafstrømning fra kørebanen, dels ud fra ønsket om at sikre, at et køretøj skal kunne mobilisere tilstrækkelig friktion til at kunne stå fast selv i tilfælde af islag på kørebanen.

Vi kan alternativt opfatte kompensationsfaktoren som udtryk for, hvor stor en del af den optrædende sideacceleration, der optages af sidehældningen. Kompensationsfaktoren bestemmes også her ved udtryk [32], men vil variere med hastigheden, og vil ved en given hastighed antage sin maksimalværdi for den maksimalt tilladte sidegradient.

Den førstnævnte tolkning af kompensationsfaktoren medfører, for fornuftigt valg af K , komfortabel kørsel med minimale krav om friktion, men også større mindsteradier i horisontalkurver. Den sidstnævnte udlægning lægger derimod op til fuld udnyttelse af de maksimalt acceptable sideaccelerationskoefficienter, hvilket nogle steder vil være rimeligt, fx på ramper.¹

Eksempel 4.D – Kørsel i horisontalkurve

Givet: En kløverbladsrampe skal kunne gennemkøres med en hastighed $V = 60$ km/h. Det er givet, at rampen kan have et sidefald på maksimalt $i = 45$ ‰. Den maksimalt tilladelige sideaccelerationskoefficient ved 60 km/h ansættes til $f_{r,till} = 0,18$. Bestem rampens mindste horisontalradius, kompensationsfaktoren samt den hastighed, som rampen vil kunne gennemkøres uden brug af sidefriktionskræfter.

Løsning: Rampens mindste horisontalradius bestemmes af udtryk [29] til:

¹ De danske motorvejsregler fra 1970 (Vejdirektoratet) fastsætter, at sidehældningen beregnes med en kompensationskoefficient på $K=0,5$, når horisontalkurveradien er mindre end $R_h = 2800$ m, og dimensioneringshastigheden er 120 km/h.

De danske vejregler fra 1943 (Ministeriet for Offentlige Arbejder, 1943) angiver indirekte, at sidegradienten så vidt muligt bør fastsættes med en kompensationskoefficient på $K = 0,6$.

$$R_h = \frac{v^2}{127 \cdot (f_{r,till} + i_r)} = \frac{60^2}{127 \cdot (0,18 + 0,045)} \text{ m} = 126 \text{ m}$$

I normalt føre, hvor friktionskoefficienten overstiger den tilladelige sideaccelerationskoefficient, er kompensationsfaktoren ifølge udtryk [32]:

$$K = \frac{i_r}{i_r + f_{r,till}} = \frac{0,045}{0,045 + 0,18} = 0,20$$

Ved kørsel i isglat føre må den radiale friktionskoefficient, μ_r , antages at være helt fraværende. Den hastighed, som kurven i denne situation skal gennemkøres med, er derfor, jævnfør udtryk [29]:

$$\begin{aligned} V_{Glatføre} &= \sqrt{R_h \cdot 127 \cdot (i_r + \mu_r)} \\ &= \sqrt{126 \cdot 127 \cdot (0,045 + 0,00)} \text{ km/h} = 27 \text{ km/h} \quad \square \end{aligned}$$

4.6 Opgaver

A. Undersøg, hvordan sideaccelerationskoefficientens hastighedsafhængighed har været udtrykt i de danske vejregler og vejregelforslag, der har været fremlagt siden 1943 (husk udtømmende referencer). Opstil en tabel, der viser de værdier, der har været gældende for hastighederne 10 km/h, 20 km/h ... 130 km/h. Diskuter forskelle. □

B. Undersøg, hvordan sideaccelerationskoefficientens hastighedsafhængighed er udtrykt i de tre skandinaviske landes vejregler; suppler eventuelt med andre lande, som vi i Danmark normalt sammenligner os med (husk udtømmende referencer). Opstil en tabel, der viser de værdier, der gælder for hastighederne 10 km/h, 20 km/h ... 130 km/h. Diskuter forskelle. □

C. Et tidligere udkast til danske vejregler (Vejdirektoratet-Vejreglerrådet, 2008a) (Vejdirektoratet-Vejreglerrådet, 2008b) angiver, at den maksimalt tilladelige sidefriktionskoefficient, $\mu_r = f_{r,till}$, fastsættes ud fra komfortkriterium – altså at det er sideaccelerationen og ikke sidefriktionen, der er bestemmende. Det anføres, at størrelsen kan fastsættes til hosstående tabelværdier:

Hastighed [km/h]	Sideaccelerationskoefficient
130	0,06
120	0,07
110	0,08
100	0,10
90	0,12
80	0,14
70	0,16
60	0,18
50	0,20
40	0,22
30	0,24

Eftervis, at den eksponentielle funktion $f_r = 0,41e^{-0,051 \cdot v}$, hvor v angiver hastigheden [m/s], gengiver tabelværdierne med korrelationskoefficient på $r^2 = 0,978$. Tegn kurve og værdier. □



5 BAKKEKØRSEL

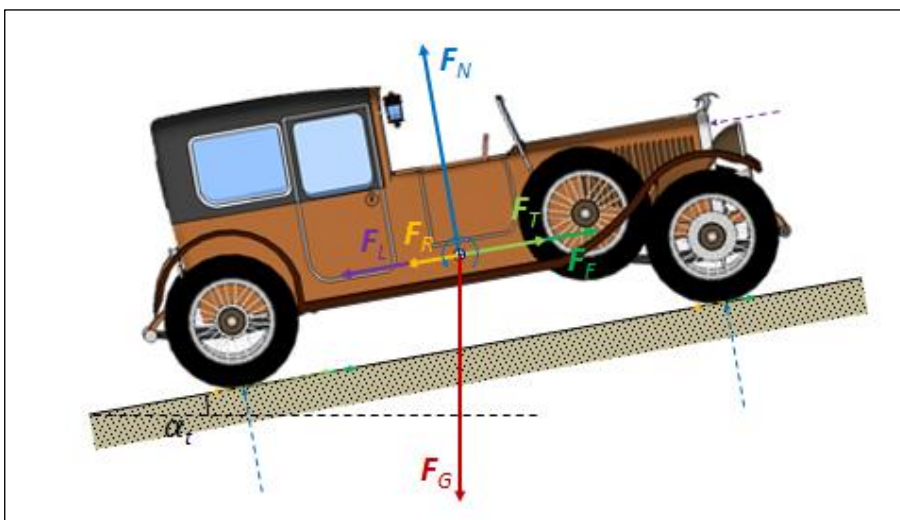
5.1 Situationen ved kørsel på en stigning

Vi betragter den situation, hvor et køretøj befinder sig på en retlinet vejoverflade med konstant tangentiell gradient, $i_t = \tan \alpha_t$. Vi ser bort fra vejoverfladens radiale gradient og regner altså $i_r = \tan \alpha_r = 0$.

De dynamiske krav er, at et køretøj skal kunne igangsætte på en stigning, og at køretøjet kan passere en stigning uden at miste for meget af sin hastighed. Herudover er det et krav, at trafikanten skal opfatte kørslen som komfortabel.

Køretøjets opbremsning til standsning behandles selvstændigt i efterfølgende afsnit.

De kræfter, der påvirker køretøjet i det lodrette plan gennem køretøjets længdeakse, er, jævnfør Figur 7, den lodrette tyngdekraft, F_G , vejbelægningens resulterende reaktionskraft, F_N , samt luftmodstanden, F_L , rullemodstanden, F_R , friktionskræfterne, F_F , og motorens trækraft, F_T , der alle virker parallelt med vejoverfladen. Rullemodstanden, friktionskræfterne og trækraften virker i kontaktfladerne mellem dæk og vejoverflade, mens luftmodstanden virker i en køretøjsspecifik højde over vejoverfladen. Kræfterne giver derfor også i et krængende moment om køretøjets x -



Figur 7. Kraftpåvirkningen på et køretøj, der befinder sig på en bakke. Friktionskræfterne, F_F , og trækraften, F_T , der overføres gennem de drivende hjul, skal kunne modvirke summen af rullemodstanden, F_R , ved alle hjul, luftmodstanden F_L , samt den vejoverfladeparallelle komponent fra tyngdekraften, F_G . Når kræfterne henføres til køretøjets tyngdepunkt, \oplus , optræder endvidere et krængende moment.

akse.

Ligevægtsligningerne er, for så vidt angår de normale og de tangentielle kræfter som angivet i følgende udtryk:

$$[36] \quad F_N = M \cdot g \cdot \cos \alpha_t$$

$$[37] \quad F_E = M \cdot g \cdot \sin \alpha_t + F_L + F_R$$

... hvor venstresiden for så vidt angår et holdende køretøj, er begrænset dels af de friktionskræfter, der kan overføres gennem hjulenes kontaktflader med vejbelægningen, dels, når køretøjet skal bevæge sig, tillige af motorkraften.

5.2 Igangsætning

Vi vurderer friktionsbehovet i forhold til et holdende køretøj, der ønskes sat i gang op ad en bakke. Vi antager, at køretøjet har den nødvendige trækraft.

Blandt de kræfter, der normalt påvirker køretøjet i længdesnitsplanet, kan vi negligere luftmodstanden, da køretøjet sætter i gang, og hastigheden derfor er ubetydelig. Vi ser også bort fra bremsende, tangentielle friktionskræfter. Tilbage har vi altså, ud over trækraften, F_T , den lodrette tyngdekraft, F_G , vejbelægningens reaktionskraft, F_N , samt rullemodstanden, F_R .

Rullemodstanden optræder ved alle hjul på køretøjet. Motorens trækraft overføres gennem køretøjets drivende hjul. Derfor begrænses udnyttelsen af trækraften af hvor stor en del af friktionskræfterne, der lader sig aktivere gennem disse hjul. Denne andel er proportional med, hvor stor en andel af køretøjets masse, der overføres til vejbelægningen gennem de drivende hjul.

Hvis d [–] betegner den del af køretøjets masse, der overføres gennem de drivende hjul, kan størrelsen af den optrædende normalreaktion, F_{Nd} , i disse hjul, og kravet til den nødvendige tangentielle friktionskraft, F_{Ftd} , skrives:

$$[38] \quad |F_{Nd}| = d \cdot |F_N| = d \cdot |F_G| \cdot \cos \alpha_t = d \cdot M \cdot g \cdot \cos \alpha_t$$

$$[39] \quad F_{Ftd} = |F_G| \cdot \sin \alpha_t + |F_R| = |F_G| \cdot \sin \alpha_t + \mu_R \cdot |F_N| \\ = M \cdot g \cdot \sin \alpha_t + \mu_R \cdot M \cdot g \cdot \cos \alpha_t = f_t \cdot |F_{Nd}| \\ = f_t \cdot d \cdot M \cdot g \cdot \cos \alpha_t \leq \mu_t \cdot d \cdot M \cdot g \cdot \cos \alpha_t$$

... hvor:

M	er køretøjets masse [kg],
g	er tyngdeaccelerationen [m/s ²],
μ_R	er rullemodstands-koefficienten [–],
f_t	er den friktionskoefficient [–], det er nødvendigt at etablere mellem de drivende dæk og vejoverfladen i den tangentielle retning, og
μ_t	er den maksimale friktionskoefficient [–], der kan opnås i

| denne retning

Heraf følger uligheden:


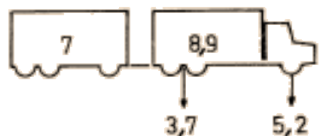
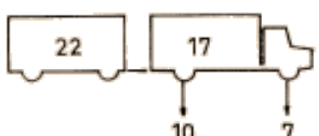
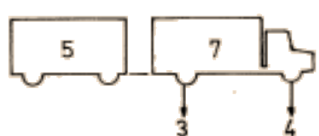
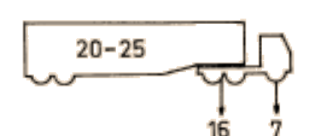

$$[40] \quad \sin \alpha_t + \mu_R \cdot \cos \alpha_t = f_t \cdot d \cdot \cos \alpha_t \leq \mu_t \cdot d \cdot \cos \alpha_t$$

hvoraf følgende krav til længdegradienten, i_t , udledes:

$$[41] \quad i_t = \tan \alpha_t \leq \mu_t \cdot d - \mu_R$$

Størrelsen d , der angiver fordelingen af køretøjets masse, afhænger af køretøjets opbygning og læsning. For personbiler er værdien af d cirka 0,5. For lastede, tunge køretøjer kan d antage værdier ned til cirka 0,2. Figur 8 viser, hvordan størrelsen kan variere ved forskellige udformninger og læsninger.

Danske vejregler rummer ikke anvisninger på, hvordan man skal håndtere problemstillingen med fordelingen af køretøjets masse. I

Lastbils kombination (Siffrorna anger tyngden i ton)	Andel tyngd på drivaxeln, d
a) 	$\frac{10^{*}}{23+26} = 0,22$ * Antag att drivande axeln på boggin alltid har max belastning, dvs 10 ton.
b) 	$\frac{3,7}{7+8,9} = 0,23$ (fall a) tom)
c) 	$\frac{10}{22+17} = 0,26$
d) 	$\frac{3}{7+5} = 0,25$ (fall c) tom)
e) 	$\frac{10}{35} = 0,29$
f) 	$\frac{6,6}{3,1+6,6+4,4} = 0,47$ (fall e) tom)

Figur 8. Nogle lastbiltyper og deres fordeling af masse på akslerne. Illustrationen afspejler forhold i Sverige i 1983.
Fra (Bontell, 1983).

stedet behandles den maksimale længdegradient, i_t , direkte. Tommelfingerreglen er, at $i_t = \tan \alpha_t \leq 60 \text{ ‰}$. Samtidig skal det påses, at det maksimale resulterende fald på kørebanen ikke overstiger 70 ‰.

Bemærk, at der gælder særlige, skærpede krav på hvilestrækningerne op mod en rundkørsel eller mod et kryds med en mere betydende vej. Kravet er, at der på en hvilestrækning på 25 m ikke må være større længdegradient end $\pm 25 \text{ ‰}$.

Eksempel 5.A – Friktion ved igangsætning op ad bakke

Givet: En ekstremt lastet lastbil, $d = 0,2$, jævnfør Figur 8, kører op ad en stigning med længdegradient, $i_t = 60 \text{ ‰}$. Det forudsættes, at den nødvendige trækraft er til stede, og det forventes, at der kan opnås en tangentiell friktionskoefficient på $\mu_t = 0,35$ mellem køretøjets dæk og vejoverfladen, og at rullemodstandskoefficienten er $\mu_R = 0,01$. Vurder, om der er tilstrækkelig friktion til at køretøjet kan forcere stigningen.

Løsning: Ved at indsætte i udtryk [41] eftervises, at der netop kan etableres tilstrækkelig friktion:

$$i_t = \tan \alpha_t = 60 \text{ ‰} \leq \mu_t \cdot d - \mu_R = 0,35 \cdot 0,2 - 0,01 = 0,06 \quad \square$$

5.3 Retardation og acceleration på bakke

Stigningsforholdene på en bakke påvirker også køretøjets hastighed. Ved kørsel op ad en bakke, vil tyngdekraften qua længdegradienten have en bremsende effekt, som motorens trækraft så vidt muligt skal overvinde. I det omfang det ikke er muligt, vil køretøjet miste hastighed på strækningen (retardation). Ved kørsel ned ad bakke, vil længdegradienten bevirke, at tyngdekraften er med til at accelerere køretøjet.

Vi betragter en bakke med længden L og med en konstant længdegradient $i_t = \tan \alpha_t$. Der ses bort fra de vertikale afrundingskurver ved foden og ved toppen af bakken, og det antages, at kørebanens tværsnit er vandret ($i_r = \tan \alpha_r = 0$). Det forudsættes, at den nødvendige tangentielle friktionskraft, F_{Ft} kan mobiliseres.

De kræfter, der påvirker køretøjet i længdesnitsplanet, er den lodrette tyngdekraft, F_G , køretøjets trækraft, F_T , luftmodstanden, F_L , vejbelægningens reaktionskraft, F_N , samt rullemodstanden, F_R .

Ved kørsel op ad bakke, er det dynamiske krav, at et køretøj, der ved bakkens fod har en vis hastighed, v , skal kunne passere bakkens, uden at køretøjets hastighed falder under en given værdi. Betragtningen er relevant, hvor der er tale om en så lang og stejl bakke, at det skal vurderes, om der er behov for anlæg af et ekstra spor (krybespor), som tunge, langsomme køretøjer kan betjene sig af op ad bakken. Ligevægtsligningerne er, for så vidt angår de normale kræfter som angivet i udtryk [36], og for så vidt angår de tangentielle kræfter som angivet i udtryk [37]. Det betyder, at størrelsen af den optrædende normalreaktion og af den resulterende retardation, g_d , af køretøjet kan skrives:

$$[42] \quad F_N = M \cdot g \cdot \cos \alpha_t$$

$$[43] \quad g_d = \frac{1}{M} (F_T - F_L - F_R) - g \cdot \sin \alpha_t$$

$$= \frac{p_T}{v} - \frac{C_L \cdot A \cdot v^2}{M} - \mu_R \cdot g \cdot \cos \alpha_t - g \cdot \sin \alpha_t$$

... idet udtrykkene for parametrene, der indgår i de enkelte kræfter, er indsat, og idet:

M	er køretøjets masse [kg],
g	er tyngdeaccelerationen [m/s^2],
p_T	er køretøjets motoreffekt pr. vægtenhed [W/kg],
C_L	er køretøjets luftmodstandskoefficient [kg/m^3],
A	er køretøjets frontareal [m^2], og
μ_R	er rullemodstands-koefficienten [-]

Da retardationen er en acceleration, altså den tidsafledede af hastigheden, v , kan udtryk [43] håndteres ved numerisk integration, når de karakteristiske størrelser for køretøjet er kendt.

Ved den numeriske betragtning, ses på så små tidsintervaller, Δt , at hastigheden med rimelighed kan anses for at være konstant inden for det enkelte inkrement. Hastighedsændringen i et inkrement bestemmes da af:

$$[44] \quad \Delta v = v_n - v_{n-1}$$

$$= \left(\frac{p_T}{v_{n-1}} - \frac{C_L \cdot A \cdot v_{n-1}^2}{M} - \mu_R \cdot g \cdot \cos \alpha_t - g \cdot \sin \alpha_t \right) \cdot \Delta t$$

... og den akkumulerede, tilbagelagte vejstrækning, L_n , bestemmes af:

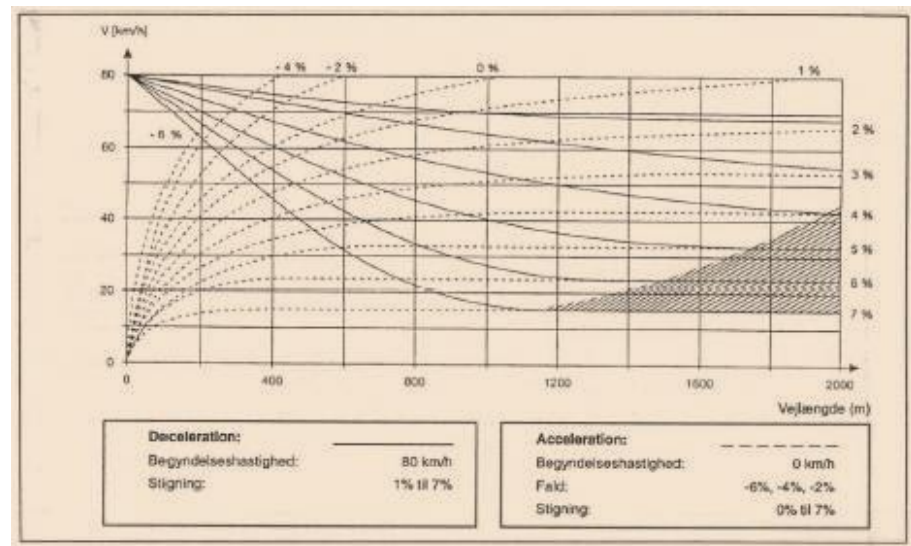
$$[45] \quad L_n = \sum_n \frac{v_n + v_{n-1}}{2} \cdot \Delta t$$

Afbildes sammenhørende værdier for tilbagelagt vejlængde og opnået hastighed fremkommer en unik retardationskurve, der gælder for det pågældende typekøretøj ved den aktuelle længdegradient. Sådanne hastighedsprofiler, jævnfør Figur 9, anvendes blandt andet til at vurdere behovet for overhalingsspor.¹

Ved kørsel ned ad bakke er betragtningen og fremgangsmåden helt tilsvarende. Denne situation er relevant ved fastlæggelse af længden af tilslutningsramper ved motorveje, således at det sikres, at alle køretøjer er oppe i passende hastighed, før de fletter ind i motorvejens trafikstrøm.

Situationen er ligeledes relevant, når det skal afgøres, hvor langt et ekstra spor skal fortsætte over en bakketop, således at de tunge,

¹ I tilknytning til de seneste danske vejregler er der tillige udarbejdet en beregningsmodel i Excel. (Vejdirektoratet, 2012).



Figur 9. Hastighedsprofil for den dimensionerende lastbil i de danske vejregler. Fra (Vejdirektoratet, 2012a).

langsomme køretøjer, der benytter det ekstra spor, kan have genvundet en hastighed, der modsvarer den øvrige trafiks.

5.4 Vertikal centrifugalacceleration

Passage af vertikalkurver opleves som ubehagelig, når den såkaldte centrifugalacceleration bliver for stor. Den vertikale centrifugalacceleration, g_v [m/s^2] er den accelerationspåvirkning, som trafikanten oplever, når køretøjet med hastigheden v [m/s] kører gennem en vertikalkurve med radius R_v [m]:

$$[46] \quad g_v = \frac{v^2}{R_v}$$

Heraf følger, at der gælder et minimumskrav til vertikalkurvens størrelse:

$$[47] \quad R_{v,Min} = \frac{v^2}{g_{v,till}}$$

De danske vejregler (Vejdirektoratet, 2012a) angiver i overensstemmelse med praksis, at centrifugalaccelerationen, såvel i konvekse som i konkave vertikalkurver, ikke bør overstige $g_{v,till} = 0,5 \text{ m/s}^2$:

Med denne værdi, vil ændringerne i hjultrykkene være i størrelsesordenen $g_{v,till}/g \approx 5 \%$, og der vil ikke være risiko for brud i køretøjets affjedringssystem, ligesom der ikke vil være behov for vertikale overgangskurver for at sikre en komfortabel, jævn ændring i den vertikale kraftpåvirkning.

Vejbump, der anvendes som hastighedsdæmpende foranstaltninger ved at udsætte køretøjet for lodrette accelerationspåvirkninger, udnytter trafikanternes ønske om komfortabel kørsel. Bumpene skal udformes under hensyntagen til den ønskede hastighed, der gælder for strækningen. Kravet i vejreglerne er, at det skal

opnås, dels at en fører af en personbil ved passage med den ønskede hastighed, og en fører af et tungt køretøj ved passage med den ønskede hastighed minus 15 km/h udsættes for en lodret acceleration på 0,65-0,75 gange tyngdeaccelerationen g , dels at den lodrette acceleration er stigende med stigende hastighed.¹

5.5 Opgaver

A. 1943-vejreglerne (Ministeriet for Offentlige Arbejder, 1943) angiver i tilknytning til de anførte maksimalstigninger på 35 ‰ henholdsvis 50 ‰: »De foreskrevne Maksimalstigninger skal ikke betragtes som absolutte, da det ikke for moderne Motorvogne spiller nogen større Rolle, om Stigningen er lidt større eller mindre, medens Længden af Stigningen derimod kan være afgørende, og det skal anføres, at Iagttagelser foretaget i Sverige har vist, at Lastautomobiler i Almindelighed skal skifte Gear paa en stigning paa 35 promille, naar denne er over 750 m lang, og paa en stigning paa 50 promille, naar denne er over 200 m lang. Personvogne behøver i Almindelighed ikke at skifte Gear paa de her foreskrevne Maksimalstigninger.«

Diskuter i hvilket omfang den citerede iagttagelse stadig er aktuel. Overvej hvilke trafikantgrupper, der i særlig grad er følsomme over for længere stigninger. □

B. Opstil, fx i et regneark, algoritmer, der gør det muligt at bestemme retardations- og accelerationsforløbet ved kørsel på retlinede vejstrækninger med stigning eller fald.

Tillad følgende inputparametre: Masse, M [kg], motoreffekt pr. vægtenhed, p_T [W/kg], luftmodstandskoefficient, C_L [kg/m³], frontareal, A [m²], rullemodstandskoefficient, μ_R [-] og begyndelseshastighed, V [km/h].

Angiv den numeriske beregning i kolonner med overskrifterne:

Tidspunkt, t ,
Hastighed, V ,
Hastighedsændring i tidsintervallet, ΔV ,
Afstand i tidsintervallet, ΔL ,
Samlet afstand, L □

C. Bestem ved hjælp af værktøjet, konstrueret under opgave **B**, for et køretøj med $M = 31.500$ kg, $p_T = 6$ W/kg, $C_L = 0,5$ kg/m³, $A = 6,5$ m² og $\mu_R = 0,01$, følgende:

Hvor lang en strækning skal køretøjet køre for at accelerere fra 30 km/h til 70 km/h på en vejstrækning med 5 ‰ stigning?

Hvor lang en strækning skal køretøjet køre for at accelerere fra 50 km/h til 70 km/h på en vejstrækning med 15 ‰ stigning?

¹ Vejbump skal udformes i overensstemmelse med et Katalog over typegodkendte bump (Vejdirektoratet-Vejreglerådet, 2013). Andre udformninger kan godkendes, såfremt det ved målinger efter en nærmere angivet metodik er eftervist, at de opfylder kravene til accelerationspåvirkninger. For pukkelbump, der ikke alene giver en lodret påvirkning, og for midlertidige vejbump gælder lidt modificerede krav.

Hvilken hastighed har køretøjet efter passage af en 750 m lang strækning med 35 ‰ stigning, når køretøjet ved stigningsfoden har begyndelseshastigheden 70 km/h?

Hvilken hastighed har køretøjet ved passage af konvergenssnittet, når det kører ind på en motorvej gennem et ruderanlæg ad en 400 m lang tilslutningsrampe med 35 ‰ fald? □

D. Antag, at et køretøjs acceleration, g_a , kan udtrykkes lineært afhængigt af den aktuelle hastighed, v : $g_a = 1,1 - 0,06 \times v$, hvor enheden for g_a er m/s^2 , og enheden for v er m/s . Antag, at køretøjet til tiden t_0 er $v_0 = 15 \text{ m/s}$. Bestem den afstand, køretøjet tilbagelægger, indtil det har nået en hastighed på $v_1 = 20 \text{ m/s}$. Bestem hvor lang tid der er gået, inden køretøjet har nået hastigheden $v_1 = 20 \text{ m/s}$. Bestem størrelsen af accelerationen efter 3 s. □

E. En bilist har konstateret, at hun på vandret kan accelerere fra hvile til 80 km/h på 35 s, og fra hvile til 100 km/h på 95 s. Antag, at køretøjets acceleration, g_a , kan udtrykkes lineært afhængigt af den aktuelle hastighed, v : $g_a = \alpha - \beta \times v$. Bestem den højeste hastighed, køretøjet kan opnå. Bestem hvor lang tid det vil tage, at accelerere køretøjet fra 65 km/h til 70 km/h. □



6 STANDSNING

På alle veje er det et udformningskrav, at trafikanten skal kunne nå at bremse for en forhindring på vejen. Det betyder, at trafikanten til hver en tid skal have udsyn til den vejstrækning, der gennemkøres indtil køretøjet er bragt til standsning. Den nødvendige oversigt kaldes stopsigt.

På vejstrækninger, hvor der kan forekomme modkørende trafik i samme kørespor er det tillige et krav, at de to trafikanter skal kunne nå at bremse op for hinanden. Der skal altså overalt på strækningerne være oversigt, som svarer til, at trafikanterne kan bringe begge køretøjer til standsning. Den nødvendige oversigt kaldes mødesigt.

Det er altså nødvendigt at kunne bestemme hvor langt et køretøj, der bremses, bevæger sig, før det er helt standset.

6.1 Standsnings-model

Opbremsnings og standsning af et køretøj beskrives i reglen som bestående af to hovedfaser, reaktionsfasen og bremsefasen.

I den indledende reaktionsfase registrerer trafikanten behovet for at standse og handler ved at aktivere køretøjets bremses. Den tid, der medgår hertil, er reaktionstiden, t_r [s], og i løbet af denne tid fortsætter køretøjet med udgangshastigheden, v_0 [m/s], og tilbage lægger en afstand, der kaldes reaktionslængden, L_r [m]:

$$[48] \quad L_r = v_0 \cdot t_r$$

I den efterfølgende bremsefase bringes køretøjet fra udgangshastigheden, v_0 , til en ny, lavere hastighed, v_N , evt. til standsning ($v_N = 0$). Køretøjets bevægelsesenergi, E_{kin} [J], reduceres med:

$$[49] \quad \Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot (v_0^2 - v_N^2)$$

... hvor:

M | er køretøjets masse [kg],

Opbremsnings forudsættes at ske ved udnyttelse af den fulde friktion, der kan etableres mellem køretøjets dæk og vejoverfladen i den aktuelle kørselssituation. Der skal her tages højde for vejens længdefald, tværfald og horisontalkurver, samt for rullemodstanden. Der skal endvidere tages hensyn til den eventuelle radiale friktion, der også skal tilvejebringes, jævnfør ligning [12].

Opbremsningen finder sted over et tidsrum, bremsetiden, t_b [s], og en afstand, bremselængden, L_b [m]. Bremselængden er den vej-længde, køretøjet tilbagelægger, fra bremsen aktiveres, til køretøjet standser. (Vejdirektoratet-Vejregelrådet, 2004)

Den samlede standselængde, L_s [m], bestemmes således af:

$$[50] \quad L_s = L_r + L_b$$

De tre væsentligste udfordringer, der er forbundet med at fastlægge standseforløbet, er dels at fastlægge den udgangshastighed, v_0 , der skal tages i regning ved traceringen, dels bestemmelsen af reaktionstiden, t_r , dels at opstille et brugbart udtryk for den friktion, der optræder under bremseforløbet. Vedrørende hastigheden skal der erindres om, at der skelnes mellem situationer, hvor sikkerhedshensyn er bestemmende, og situationer, hvor der også inddrages komforthensyn.

6.2 Reaktionstiden

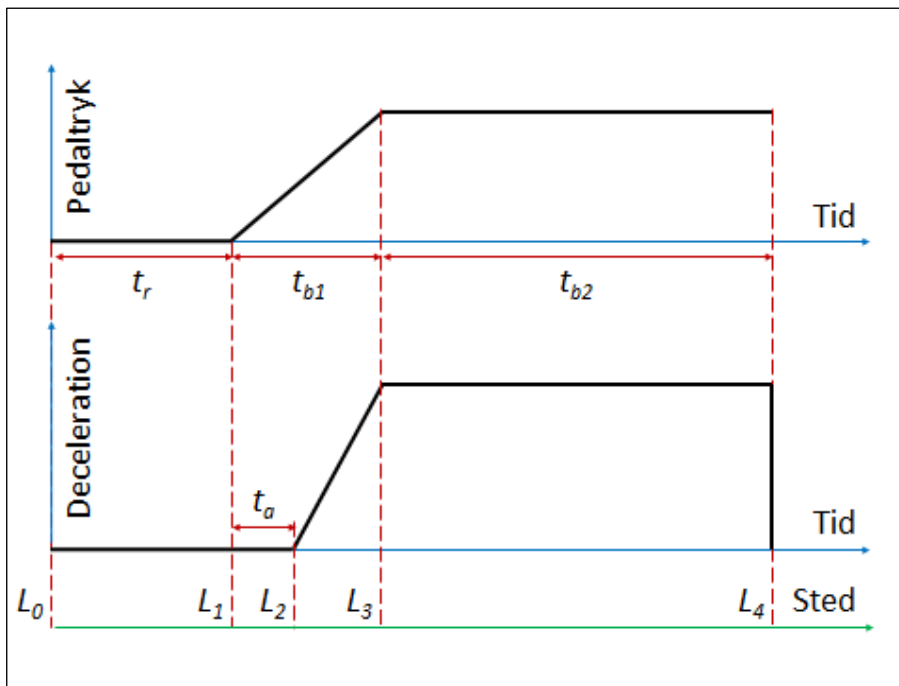
Reaktionstiden er defineret som tiden fra en trafikant har fysisk mulighed for at opfatte en trafiksituation, der skal reageres på, og til reaktionen indtræder. (Vejdirektoratet-Vejregelrådet, 2004) Det er en af de grundparametre, der er knyttet størst usikkerhed til.

Reaktionstiden er forskellig fra trafikant til trafikant og fra situation til situation. Værdien er derfor udtryk for et valg.

Herrstedt har i et litteraturstudium (2007) sammenfattet tilgængelig viden om bremsereaktionstid og beslutningsreaktionstid. Det er væsentligt, at gøre sig klart, at der i løbet af reaktionstiden sker flere ting i hovedet på trafikanten:

- Trafikanten opfatter (detekterer) situationen.
- Trafikanten tolker (identificerer) situationen.
- Trafikanten beslutter, hvordan der skal reageres på situationen.
- Trafikanten igangsætter sin reaktion på situationen.

Endvidere er det væsentligt at skelne mellem simple og mere komplekse situationer. I den simple situation giver beslutningen sig selv, og udfordringen er så hurtigt som muligt at opfatte og tolke situationen samt at iværksætte handlingen. I den mere komplekse situation vil trafikanten have flere handlingsalternativer, og opgaven rummer derfor også, at disse alternativer skal bedømmes, og at der skal træffes et valg mellem dem, før handlingen sættes i gang. De bremsesituationer, der lægges til grund for traceringen af en vejstrækning, hører til de simple situationer. (Herrstedt, 2007)



Figur 10. Simplificeret fremstilling af differentieret standsningsforløb, hvor der optræder fire faser.

I løbet af reaktionstiden, t_r , opfatter og tolker trafikanten situationen, beslutter at bremse og flytter sin fod fra speederen til bremsepedalen. Køretøjet tilbagelægger imens afstanden $L_1 - L_0$.

Når trafikanten begynder at trykke bremsepedalen ned, går der et tidsrum, inden bremsen har nået sit maksimale niveau. Dette tidsrum betegner modellen til-maks-bremsetiden, t_{b1} , og tidsrummet har typisk en varighed på 0,3-1,0 s, afhængig af trafikantens adfærd og køretøjets bremsesystem.

I løbet af den første del af til-maks-bremsetiden, trykker trafikanten bremsepedalen ned, indtil bremsen begynder at »tage fat«. Tiden, der medgår hertil kan kaldes bremseinitieringstiden, t_a , og den angives, at ligge på typisk 0,1-0,4 s. Køretøjet tilbagelægger i dette tidsrum afstanden $L_2 - L_1$.

I den resterende del af til-maks-bremsetiden øges trykket på bremsepedalen, indtil bremsen når sit maksimale niveau. Køretøjet tilbagelægger i dette tidsrum afstanden $L_3 - L_2$.

Endelig forløber opbremsningen med fuldt aktiveret bremse i tiden t_{b2} over afstanden $L_4 - L_3$, indtil køretøjet er bragt til standsning, eller indtil der er opnået en tilstræbt ny, lavere hastighed.

Bemærk, at det i henhold til definitionen af reaktionstid må gælde, at bremsetiden, t_b , fastsættes som: $t_b = t_{b1} + t_{b2}$, også selvom den fysiske bremselængde i virkeligheden alene udgør afstanden $L_4 - L_2$.

Bemærk om figurens abscisseakser, at den tilbagelagte længde ikke er proportional med tiden fra det tidspunkt, $t_r + t_a$, hvor bremsen begynder at »tage fat«. Efter (Greibe, 2008).

Herrstedts litteraturstudie viser, at der ikke synes at være nogen entydig, signifikant forskel på ældre og yngre bilister, når det drejer sig om de simple bremsereaktionssituationer, hvor der skal bremses for en uventet genstand eller reageres på aktivering af bremselygter på den forankørende bil. Derimod synes der at optræde en aldersbetinget forskel i flere, mere komplekse beslutningssituationer. Endvidere gælder det, at reaktionstiden for uventede hændelser generelt vil være længere end ved forventede hændelser.

Det sammenfattes, at undersøgelser foretaget i rigtig trafik viser, at reaktionstiden ved en simpel bremseaktion for en forventet hændelse vil være omkring 1,5 sekunder (90 %-fraktil) og op til 2,0 sekunder, mens den ved en uventet hændelse vil være omkring 2,5 sekunder (90 %-fraktil) og op til 2,7 sekunder. (Herrstedt, 2007)

I et nyere litteraturstudie (Meltøfte, 2011) behandles reaktionstiden i en trafikale og i en adfærdsmæssig kontekst, og fastsættelsen diskuteres i relation de fastsættelsen af de øvrige dimensioneringskriterier, der anvendes ved projektering af et vejanlæg.

I de modeller, der anvendes ved tracering af en vejstrækning, er der anlagt et groft, simplificeret forløb: Under hele reaktionstiden sker der ikke en opbremsning; under hele bremsetiden virker bremsekræfterne maksimalt.

I detaljerede studier og beskrivelser af standsningsforløbet er det imidlertid nødvendigt mere præcist at fastlægge, hvornår reaktionen slutter, og bremsningen begynder, jævnfør Figur 10. Er det når trafikantens fod rører bremsepedal, er det når, bremsepedalen er aktiveret så meget, at bremsen »tager fat«, eller er det, når trykket på bremsepedalen har fået bremsen til at virke på maksimalt niveau?

6.3 Friktionskoefficienten

Friktionskoefficienten er, som anført i afsnit 2.6, hastighedsafhængig. Til praktisk brug har det været kutyme, at håndtere den hastighedsafhængighed ved at arbejde med middelfriktionskoefficienter, typisk ved opbremsning fra en given udgangshastighed og til fuld standsning. Hermed har man kunnet reducere selve beregningsarbejdet. Til gengæld må man foretage tabelopslag med større eller mindre tilnærmelser, og man har ofte også afskåret sig fra, at kunne regne på nedbremsninger, der ikke fører til fuld standsning.

6.3.1 Middelfriktionskoefficient,

Middelfriktionskoefficienten, μ_{Mid} , er middelværdien af den friktion, der optræder ved opbremsning af køretøjet fra én hastighed, v_1 , til en anden, v_2 . Ofte er sluthastigheden nul, $v_2 = 0$ m/s, svarende til fuld opbremsning.

Størrelsen af μ_{Mid} kan findes ud fra energiligningen, idet den tabte energi modsvarer det udførte arbejde. Køres på en vandret vej, er den potentielle energi konstant, og friktionen afhænger af normalreaktionskraften, der udligner tyngdekraften, hvorfor vi finder den samlede bremsestrækning, L_b af formlen:

$$[51] \quad \Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot (v_0^2 - v_N^2) = W = |F_F| \cdot L_b = \mu_{Mid} \cdot M \cdot g \cdot L_b$$

Heraf følger:

$$[52] \quad \mu_{Mid} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g \cdot L_b}$$

Hvis der ikke er tale om retlinet kørsel på helt vandret vej, skal friktionskoefficienten korrigeres for indflydelsen fra længdegradienten og/eller fra sideaccelerationen.

Køres således på en vej med konstant længdegradient, $i_t = \tan \alpha_t$, optræder der en ændring i potentiel energi, ΔE_{pot} , som skal medtages i regnestykket. Bremselængden findes da af:

$$\begin{aligned} [53] \quad \Delta E_{kin} &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot (v_0^2 - v_N^2) \\ &= f_t \cdot M \cdot g \cdot L_b \cdot \cos \alpha_t + M \cdot g \cdot L_b \cdot \sin \alpha_t \\ &\leq (\mu_{Mid} + i_t) \cdot M \cdot g \cdot L_b \cdot \cos \alpha_t \end{aligned}$$

hvorfor middelfriktionskoefficienten bliver:

$$[54] \quad \mu_{Mid} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g \cdot L_b \cdot \cos \alpha_t} - i_t \approx \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g \cdot L_b} - i_t$$

Eksempel 6.A – Middelfriktionskoefficient

Givet: Et køretøj bringes på en ren, vandret, retlinet vej til standsning (0 km/h) fra udgangshastigheden $V_0 = 100$ km/h. Bremselængden er $L_b = 126$ m. Bestem middelfriktionskoefficienten.

Løsning: Middelfriktionskoefficienten bestemmes jævnfør [52], idet $i_t = 0$, og idet vi undervejs omregner hastighederne fra km/h til m/s:

$$\mu_{Mid} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g \cdot L_b} = \frac{\left(\frac{V_1}{3,6}\right)^2 - \left(\frac{V_2}{3,6}\right)^2}{2 \cdot g \cdot L_b} = \frac{\left(\frac{100}{3,6}\right)^2 - \left(\frac{0}{3,6}\right)^2}{2 \cdot 9,818 \cdot 126} = 0,312 \quad \square$$

6.3.2 Analytisk bestemmelse af bremselængden

Det er muligt at bestemme bremselængden analytisk, når friktionskoefficienten er udtrykt som en passende simpel funktion af den aktuelle hastighed. Nogle af disse situationer behandles nedenfor. Mere komplicerede sammenhænge håndteres derimod lettest ved numerisk integration.

Konstant friktionskoefficient: Hvis friktionskoefficienten, der decelererer køretøjet, er konstant, $\mu_T = A_\mu$, gælder for accelerationen (decelerationen), g_a , hastigheden, v , henholdsvis den kørte længde, L :

$$[55] \quad g_a = -\mu_T \cdot g = -A_\mu \cdot g$$

$$\begin{aligned} [56] \quad v &= \int g_a \cdot dt = \int (-\mu_T \cdot g) \cdot dt = -\int (A_\mu \cdot g) \cdot dt \\ &= -A_\mu \cdot g \cdot t + k_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [57] \quad L &= \int v \cdot dt = \int (-A_\mu \cdot g \cdot t + k_1) \cdot dt \\ &= -\frac{1}{2} A_\mu \cdot g \cdot t^2 + k_1 \cdot t + k_2 \end{aligned}$$

I disse formler bestemmes konstanterne k_1 og k_2 af kendte sammenhørende værdier af tid, hastighed og kørt distance. Når man ved at til tiden $t = 0$, er hastigheden v_0 og den kørte distance 0, så udledes, at $k_1 = v_0$ og at $k_2 = 0$.

Lineært hastighedsafhængig friktionskoefficient: Hvis friktionskoefficienten, der decelererer køretøjet, afhænger lineært af den aktuelle hastighed, $\mu_T = A_\mu + B_\mu \cdot v$, gælder:

$$[58] \quad g_a = -\mu_T \cdot g = -(A_\mu + B_\mu \cdot v) \cdot g$$

$$[59] \quad v = \int dv = \int g_a \cdot dt = \int (-\mu_T \cdot g) \cdot dt \\ = -\int (A_\mu + B_\mu \cdot v) \cdot g \cdot dt$$

Isoleres tiden, t , findes ved integration:

$$[60] \quad t = \int dt = \frac{-1}{g} \cdot \int \frac{1}{A_\mu + B_\mu \cdot v} \cdot dv = \frac{-1}{g \cdot B_\mu} \cdot \ln(A_\mu + B_\mu \cdot v_t) + k$$

Betegner v_0 hastigheden til tiden $t = 0$, bestemmes konstanten k :

$$[61] \quad k = \frac{1}{g \cdot B_\mu} \cdot \ln(A_\mu + B_\mu \cdot v_0)$$

$$[62] \quad t = \frac{-1}{g \cdot B_\mu} \cdot (\ln(A_\mu + B_\mu \cdot v_t) - \ln(A_\mu + B_\mu \cdot v_0)) \\ = \frac{-1}{g \cdot B_\mu} \cdot \ln \frac{A_\mu + B_\mu \cdot v_t}{A_\mu + B_\mu \cdot v_0}$$

$$[63] \quad e^{-g \cdot B_\mu \cdot t} = \frac{A_\mu + B_\mu \cdot v_t}{A_\mu + B_\mu \cdot v_0}$$

$$[64] \quad (A_\mu + B_\mu \cdot v_0) \cdot e^{-g \cdot B_\mu \cdot t} = A_\mu + B_\mu \cdot v_t$$

$$[65] \quad v_t = \frac{1}{B_\mu} (A_\mu + B_\mu \cdot v_0) \cdot e^{-g \cdot B_\mu \cdot t} - \frac{A_\mu}{B_\mu} \\ = \frac{A_\mu}{B_\mu} \cdot (e^{-g \cdot B_\mu \cdot t} - 1) + v_0 \cdot e^{-g \cdot B_\mu \cdot t}$$

Herefter bestemmes distancen L , der er tilbagelagt i løbet af tiden t :

$$[66] \quad L = \int v \cdot dt = \int \left(\frac{A_\mu}{B_\mu} \cdot (e^{-g \cdot B_\mu \cdot t} - 1) + v_0 \cdot e^{-g \cdot B_\mu \cdot t} \right) \cdot dt \\ = -\frac{A_\mu}{g \cdot B_\mu^2} \cdot e^{-g \cdot B_\mu \cdot t} - \frac{A_\mu}{B_\mu} \cdot t - \frac{v_0}{g \cdot B_\mu} \cdot e^{-g \cdot B_\mu \cdot t} + K$$

Konstanten K bestemmes af, at distancen $L = 0$ til tiden $t = 0$:

$$[67] \quad K = \frac{A_\mu}{g \cdot B_\mu^2} + \frac{v_0}{g \cdot B_\mu}$$

Herefter findes følgende udtryk for den til enhver tid, t , kørte længde:

$$\begin{aligned}
 [68] \quad L &= -\frac{A_\mu}{g \cdot B_\mu^2} \cdot e^{-g \cdot B_\mu \cdot t} - \frac{A_\mu}{B_\mu} \cdot t - \frac{v_0}{g \cdot B_\mu} \cdot e^{-g \cdot B_\mu \cdot t} + \frac{A_\mu}{g \cdot B_\mu^2} + \frac{v_0}{g \cdot B_\mu} \\
 &= -\frac{A_\mu}{B_\mu} \cdot t + \left(\frac{A_\mu}{g \cdot B_\mu^2} + \frac{v_0}{g \cdot B_\mu} \right) \cdot (1 - e^{-g \cdot B_\mu \cdot t})
 \end{aligned}$$

Eksempel 6.B – Nedbremssning, hastighedslineær friktion

Givet: Et køretøj nedbremses fra en begyndelseshastighed på $V = 90$ km/h. Der antages en lineært hastighedsafhængig friktionskoefficient på $\mu_T = 0,40 - 0,004 \cdot v$, hvor hastigheden v er angivet i m/s. Bestem hastigheden efter 5 sekunders nedbremssning, og bestem den distance, som køretøjet i dette tidsrum har tilbagelagt.

Løsning: Begyndelseshastigheden omregnes, jævnfør tidligere eksempler, til $v_0 = 25$ m/s. Der indsættes følgende værdier: $A_\mu = 0,40$, $B_\mu = -0,004$ s/m samt $g = 9,818$ m/s². Hastigheden efter nedbremssning i $t = 5$ sekunder bestemmes af udtryk [65]:

$$\begin{aligned}
 v_t &= \frac{A_\mu}{B_\mu} \cdot (e^{-g \cdot B_\mu \cdot t} - 1) + v_0 \cdot e^{-g \cdot B_\mu \cdot t} \\
 &= \frac{0,40}{-0,004} \cdot (e^{9,818 \cdot 0,004 \cdot 5} - 1) + 25 \cdot e^{9,818 \cdot 0,004 \cdot 5} \\
 &= -100 \cdot (1,217 - 1) + 25 \cdot 1,217 = 8,7 \text{ m/s} \approx 31,3 \text{ km/h}
 \end{aligned}$$

Den tilbagelagte afstand bestemmes af udtryk [68]:

$$\begin{aligned}
 L &= -\frac{A_\mu}{B_\mu} \cdot t + \left(\frac{A_\mu}{g \cdot B_\mu^2} + \frac{v_0}{g \cdot B_\mu} \right) \cdot (1 - e^{-g \cdot B_\mu \cdot t}) \\
 &= -\frac{0,40}{-0,004} \cdot 5 + \left(\frac{0,40}{9,818 \cdot 0,004^2} - \frac{25}{9,818 \cdot 0,004} \right) \cdot (1 - e^{9,818 \cdot 0,004 \cdot 5}) \\
 &= 500 + (2546 - 637) \cdot (1 - 1,217) = 86 \text{ m} \quad \square
 \end{aligned}$$

Eksponentielt hastighedsafhængig friktionskoefficient: Hvis friktionskoefficienten følger en eksponentielfunktion af hastigheden, $\mu_T = D_\mu \cdot \exp(E_\mu \cdot v)$, gælder nedenstående udledning:

$$[69] \quad g_a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 L}{dt^2} = -\mu_T \cdot g = -D_\mu \cdot e^{E_\mu \cdot v} \cdot g$$

Omskrives udtrykket:

$$[70] \quad dt = \frac{-1}{g \cdot D_\mu} e^{-E_\mu \cdot v} \cdot dv$$

og udnyttes, at hastigheden er den tidsafledede af den tilbagelagte bremselængde, findes:¹

$$\begin{aligned}
 [71] \quad L &= \int dl = \int v \cdot dt = \frac{-1}{g \cdot D_\mu} \int e^{-E_\mu \cdot v} \cdot dv \\
 &= \frac{-1}{g \cdot D_\mu \cdot E_\mu} \cdot \left(v + \frac{1}{E_\mu} \right) \cdot e^{-E_\mu \cdot v} + C_1
 \end{aligned}$$

hvor konstanten C_1 bestemmes ud fra, at i udgangssituationen, $L_0 = 0$, hvor opbremsningen påbegyndes, er hastigheden v_0 :

$$[72] \quad C_1 = \frac{1}{g \cdot D_\mu \cdot E_\mu} \cdot \left(v_0 + \frac{1}{E_\mu} \right) \cdot e^{-E_\mu \cdot v_0}$$

¹ Jævnfør standardtabelværker for integraler.

Bremselængden, L_b , bestemmes herefter af formel [71], svarende til, at det fuldt opbremsede køretøjs hastighed er 0:

$$[73] \quad L_b = \frac{1}{g \cdot D_\mu \cdot E_\mu^2} - \frac{-1}{g \cdot D_\mu \cdot E_\mu} \cdot \left(v_0 + \frac{1}{E_\mu} \right) \cdot e^{-E_\mu \cdot v_0}$$

Middelfriktionskoefficienten – altså den friktionskoefficient, der ville have optrådt, dersom friktionen havde været konstant under opbremsningen – kan herefter bestemmes af udtryk [52] eller [54], når længdegradienten i_t er konstant og kendt.

Eksempel 6.C – Bremselængde, hastighedsekspontiel friktion

Givet: Et køretøj bringes på en ren, vandret, retlinet vej til standsning (0 km/h) fra udgangshastigheden $V_0 = 100$ km/h. Bestem bremselængden, når friktionskoefficienten, der optræder under opbremsningen, følger udtrykket: $\mu_T = 0,46 \cdot \exp(-0,0205 \cdot v)$.

Løsning: Begyndelseshastigheden omregnes til $v_0 = 27,8$ m/s. Med de anførte værdier for D_μ og E_μ og med $g = 9,818$ m/s² bestemmes bremselængden, jævnfør [73]:

$$\begin{aligned} L_b &= \frac{1}{g \cdot D_\mu \cdot E_\mu^2} - \frac{-1}{g \cdot D_\mu \cdot E_\mu} \cdot \left(v_0 + \frac{1}{E_\mu} \right) \cdot e^{-E_\mu \cdot v_0} \\ &= \frac{1}{9,818 \cdot 0,46 \cdot 0,0205^2} + \frac{1}{9,818 \cdot 0,46 \cdot 0,0205} \cdot \left(27,8 - \frac{1}{0,0205} \right) \cdot e^{0,0205 \cdot 27,6} \\ &= 126 \text{ m} \end{aligned}$$

□

6.3.3 Numerisk bestemmelse af bremselængden

Hvis friktionskoefficienten ikke følger en passende simpel funktion af hastigheden, kan bremselængden ofte bestemmes numerisk. Det gælder fx hvis der ikke er tale om retlinet kørsel på helt vandret vej, og hvor friktionskoefficienten derfor skal korrigeres for indflydelsen fra længdegradienten og/eller fra sideaccelerationen.

Den numeriske løsning bestemmer bremselængden ved at se på små, trinvis ændringer af hastigheden – så små, at friktionskoefficienten og dermed køretøjets acceleration med rimelighed kan anses for at være konstante inden for det enkelte inkrement. Den samlede bremselængde fremkommer så som summen af inkrementernes bremselængdebidrag.

For at illustrere beregningsgangen betragtes en situation, hvor opbremsningen sker på en vejstrækning med konstant længdegradient, $i_t = \tan \alpha_t$. Det antages, at den totale friktionskoefficient følger en kendt funktion, der afhænger af den aktuelle hastighed, v : $\mu_T = \mu_T(v)$. Det antages endvidere, at en del af den friktion, der kan tilvejebringes mellem køretøjets dæk og vejoverfladen, bliver beslaglagt til at udligne den sideacceleration, der ikke kompenseres af vejoverfladens sidegradient. Denne ukompenserede sideacceleration antages ligeledes at være udtrykt ved en kendt, hastighedsafhængig funktion: $f_r = f_r(v)$.

Nedbremsningen vil derfor ske med en decelerationskoefficient, der ligeledes er hastighedsafhængig, og som, jævnfør udtryk [11], kan udtrykkes:

$$[74] \quad \frac{g_a}{g} = \mu_t + i_t = \sqrt{\mu_T^2(v) - f_r^2(v)} + i_t$$

Arbejdes der i den numeriske bestemmelse af bremselængden med konstante trinstørrelser, Δv , og betragtes det n 'te inkrement, $v_n = v_{n-1} + \Delta v$, findes den tilbagelagte delafstand, ΔL_n :

$$[75] \quad \Delta L_n = \frac{v_n^2 - v_{n-1}^2}{2 \cdot g_a} = \frac{v_n^2 - (v_n - \Delta v)^2}{2 \cdot g \cdot \left(\sqrt{\mu_T^2\left(v_n - \frac{\Delta v}{2}\right) - f_r^2\left(v_n - \frac{\Delta v}{2}\right)} + i_t \right)}$$

Nedbremselængden til hastigheden v_n bestemmes derefter af:

$$[76] \quad L_b = \sum_n \Delta L_n$$

Den tid, Δt_n , som det tager køretøjet at tilbagelægge afstanden, ΔL_n , i det n 'te trin, bestemmes ved at inddrage middelhastigheden på delstrækningen:

$$[77] \quad \Delta t_n = \frac{2 \cdot \Delta L_n}{v_n + v_{n-1}}$$

og nedbremsetiden til hastigheden v_n bestemmes derefter af:

$$[78] \quad t_b = \sum_n \Delta t_n$$

Bemærk, at de numeriske beregninger kan gentages med gradvis mindre værdier af inkrementet, Δv , indtil afvigelserne mellem successive beregninger er så beskeden, at unøjagtigheden kan anses for at være uden betydning for resultatets praktiske anvendelse. Beregninger med en trinstørrelse på $\Delta V = -1$ km/h er i praksis fuldt tilstrækkelig i vejgeometrisk sammenhæng, og et inkrement på 10 km/h er ikke ualmindeligt.

Eksempel 6.D – Bremselængde, numerisk bestemmelse

Givet: De danske vejregler (Vejdirektoratet, 2012a) angiver, at den totale friktionskoefficient regnes konstant, $\mu_T = 0,377$, mens den maksimalt tilladelige sideaccelerationskoefficient gøres eksponentielt afhængig af hastigheden: $f_{r,till} = 0,28 \cdot \exp(-0,0096 \cdot V_d)$, hvor dimensioneringshastigheden, V_d , indsættes i enheden km/h. Bestem med inkremerter på $\Delta V = -5$ km/h, hvor lang en strækning køretøjet vil køre, når det nedbremses fra 90 km/h til 70 km/h, mens det på en strækning med konstant fald på 40 % bevæger sig gennem en kurve med sidegradient $i_r = 30$ ‰ og med en horisontalradius, der netop svarer til en planlægningshastighed på $V_d = 100$ km/h.

Løsning: Den tilladte sideaccelerationskoefficient ved dimensioneringshastigheden $V_d = 100$ km/h beregnes:

$$f_{r,till} = 0,28 \cdot e^{-0,0096 \cdot 100} = 0,107$$

Horisontalkurvens radius bestemmes herefter af udtryk [29]:

$$R_h = \frac{V_d^2}{127 \cdot (f_{r,till} + i_r)} = \frac{100^2}{127 \cdot (0,107 + 0,030)} = 575 \text{ m}$$

Den numeriske beregning sammenfattes i nedenstående skema, hvor *kolonne 4* bestemmes af udtryk [27], *kolonne 5* bestemmes

af udtryk [11], *kolonne 6* bestemmes af udtryk [75] og *kolonne 7* akkumulerer resultaterne i kolonne 6; overalt naturligvis med nødvendige omregninger af enheder. Resultatet er, at køretøjet i løbet af nedbremsningen tilbagelægger 38 m.

V_{start} km/h	V_{slut} km/h	V_{middel} km/h	f_r –	μ_t –	ΔL m	L m
90	85	87,5	0,075	0,370	10,4	10
85	80	82,5	0,063	0,372	9,8	20
80	75	77,5	0,052	0,373	9,2	29
75	70	72,5	0,042	0,375	8,5	38

6.4 Opgaver

A. Undersøg, hvordan reaktionstiden ved bremsning har været udtrykt i de danske vejregler og vejregelforslag, der har været fremlagt siden 1943 (husk udtømmende referencer). Diskuter forskelle. □

B. Undersøg, hvordan reaktionstiden ved bremsning er udtrykt i de tre skandinaviske landes vejregler, (Statens Vegvesen, 2008) (Vägverket, 2004); suppler eventuelt med andre lande, som vi i Danmark normalt sammenligner os med (husk udtømmende referencer). Diskuter forskelle. □

C. Angiv et analytisk udledt udtryk for bremselængden, når friktionskoefficienten udtrykkes som et andengradspolynomium af den aktuelle hastighed: $\mu_T = A_\mu + B_\mu \cdot v + C_\mu \cdot v^2$. □

D. De danske vejregler fra 1943 (Ministeriet for Offentlige Arbejder, 1943) anvender i forbindelse med fastsættelsen af standselængder og minimumsradier bremsefriktionskoefficienter, μ_b , der er 0,25 ved 40-60 km/h og stiger til 0,4 ved hastighedsfaktoren 100 km/h.

Det hedder i bemærkningerne til disse gamle vejregler: »Friktionskoefficienten for en tør Vejbane kan paaregnes at være 0,4, medens den under ugunstige Vejrforhold kan regnes at være 0,25. (Ved Isslag er den 0,1 eller mindre, men dette er der set bort fra i denne Forbindelse, da Hastigheden i saadant Tilfælde maa regnes at være ganske ringe). Der er i ovenstaaende Beregning regnet med den af Justitsministeriet krævede Friktionskoefficient 0,4 for 4-hjuls-bremsede Vogne for Hastighedsfaktoren 100 km/Time, idet det maa forudsættes, at denne Hastighed kun anvendes, naar Vejbanens Tilstand er en saadan, at det er forsvarligt at køre saa hurtigt, medens der er regnet med Friktionskoefficient 0,25 for Hastigheder paa 60 km/Time og derunder. For Hastigheder mellem 100 km/Time og 60 km/Time er anvendt gradvis faldende Friktionskoefficient fra 0,4 til 0,25«.

Diskuter hvilke forudsætninger, der har ligget til grund for disse bemærkninger og for vejreglens friktionsantagelser, herunder forudsætninger om trafikantadfærd, om vejens beskaffenhed samt om køretøjets egenskaber. Diskuter hvordan disse forudsætninger har udviklet sig siden udsendelsen af vejreglen. □

7 SIGT

Blandt de grundlæggende krav til vejtracéet er, at trafikanterne skal kunne opfatte hindringer og hinanden så betids, at de er i stand til at standse eller undvige før påkørsel. Kravet betyder, at trafikanterne skal kunne se, have oversigt, en vis afstand frem.

Kravet indebærer, at vejens vertikalkurver og horisontalkurver skal være større end nogle mindste værdier. Betragtningerne er principielt ens for længdeprofilet og for linjeføringen. De væsentligste forskelle ligger i placeringen af øje og objekt, i afstanden til ubrudte, faste genstande langs horisontalkurven, samt i at trafikanterne ved kørsel i horisontalkurver ikke kan udnytte den totale friktion til at bremse med, jævnfør friktionsellipsen.

7.1 Stopsigt, mødesigt og overhalingssigt

Den nødvendige afstand, som trafikanten skal kunne overskue, afhænger af hastigheden og af den situation, der skal forebygges. Man skelner mellem om der er behov for stopsigt, mødesigt eller overhalingssigt. I alle tre tilfælde, skal såvel det vertikale som det horisontale forløb vurderes. Det sker særskilt.

7.1.1 Stopsigt

Stopsigt er den sigtlængde, der sikrer, at trafikanten kan nå at se, opfatte og reagere på en hindring, så køretøjet er bragt til standsning, før hindringen.

Stopsigtlængde, S_{stop} , skal være til stede overalt på alle veje, og den skal være lige så stor som standselængden, L_s , ved kørsel med den hastighed, som vejen på det aktuelle sted skal udformes med hensyntagen til. Denne hastighed kaldes i de nye danske vejregler (Vejdirektoratet, 2012a) for dimensioneringshastigheden, v_d :

$$[79] \quad S_{stop} = L_s(v_d)$$

Når det er dimensioneringshastigheden, og ikke den tilladte hastighed eller planlægningshastigheden, der lægges til grund for bestemmelsen af stopsigt, så er grunden, at man ønsker at indbygge sikkerhed, ikke for de, der kører stærkere end tilladt, men for den sagesløse tredjemand, der færdes lovligt, og som risikerer at møde fartglade trafikanter.

Gennem konvekse vertikalkurver (bakketop) bedømmes stopsigtlængden for en personbil. Gennem konkave vertikalkurver (dalbund) bedømmes stopsigtlængden såvel for en personbil som for

en lastvogn, hvor trafikantens øjepunkthøjde er større end i en personbil.

I det horisontale plan antages køretøjet placeret, så man i stop-sigtsituationen kan måle oversigten midt i køresporet.

I alle tilfælde, vurderes stopsigtlængden i forhold til objektpunkthøjden for en fast genstand.

7.1.2 Mødesigt

Mødesigt er den sigtlængde, der er nødvendig, for at to trafikanter, der kører mod hinanden, kan nå at se, opfatte og reagere på hinanden, så begge køretøjer er bragt til standsning, før de mødes.

Mødesigtlængde skal være til stede overalt på vejstrækninger, hvor der kan optræde modkørende trafik i samme vognbane. Det er altså ikke nødvendigt at vurdere mødesigt på motorveje, og på vejstrækninger, hvor det ikke skal være tilladt at overhale.

Mødesigt kan fastlægges på to måder, der har principielt forskellige rødder. Begge betragtninger optræder, og de brydes indbyrdes i begrebsdannelsen.

Den ene betragtning sigter på, at afmærkning skal udføres ensartet på hele vejnettet. Det gælder konkret afstribning af overhalingsforbud med længdeafmærkning Q44 »Spærrelinje«.

På to-sporede veje, der er brede nok til at have midterlinje og på 2+1-veje ønsker man, at trafikanterne kan være sikre på, at vejen er afstribet med spærrelinje, hvis oversigten er mindre end en fastsat værdi, der hører til den hastighedsbegrænsning, der aktuelt gælder. Værdierne står i den danske afmærkningsbekendtgørelse (Vejdirektoratet, 2012d). Værdiernes størrelse svarer nogenlunde til de, man vil kunne udregne, jævnfør nedenfor, men principielt er de altså koblet fra en egentlig, konkret beregning.

Den anden betragtning bestemmer mødesigtelængden, $S_{Møde}$, for personbiler ved planlægningshastigheden, v_p , idet objekthøjden fastsættes som køretøjshøjden for en modkørende personbil. Mødesigtlængden vil derfor være dobbelt så stor som standselængden ved planlægningshastigheden:

$$[80] \quad S_{Møde} = 2 \cdot L_s(v_p)$$

De danske vejregler (Vejdirektoratet, 2012a) fastsætter **mødesigt** med udgangspunkt i afmærkningsbekendtgørelsens § 138: *Når oversigten mellem 2 punkter, beliggende 1,0 m over vejens midtlinje, er mindre end værdierne i tabel 2, anses oversigten for begrænset.* Der skal derfor anvendes spærrelinje, Q44, som midtlinje. Tabellens værdier er anført nedenfor.

Hastighed [km/h]	90	80	70	60	50	40
Oversigt mindre end [m]	290	240	190	150	110	80

Længdegradientens forskellige indvirkning på modkørende køretøjer, der bevæger sig op henholdsvis ned ad en bakke, tages i reglen ikke i regning; i stedet beregnes begge køretøjers standselængder som ved kørsel på vandret vej, idet der afrundes. I konvekse kurver er den fejl, der herved begås, til den sikre side; men ved konkave kurver går man herved på akkord med sikkerheden.

7.1.3 Overhalingssigt

Hvor der skal være overhalingssigt, skal trafikanten kunne se, opfatte og reagere på eventuelle hindringer eller modkørende trafik på den aktuelle delstrækning så betids, at det er muligt at afslutte eller afbryde overhalingsskiftet.

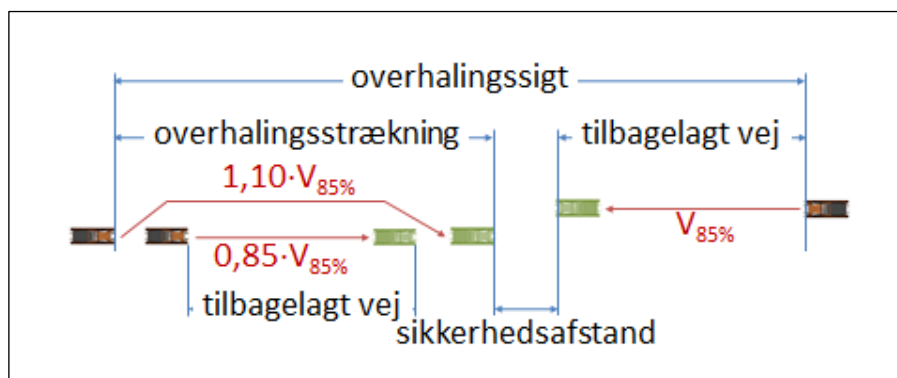
Overhalingssigtlængde, S_{over} , skal være til stede overalt på de delstrækninger, hvor der kan optræde modkørende trafik i samme kørespor, og hvor man ønsker, at trafikanten fortrinvis skal gennemføre deres overhalingsskift. Overhalingssigt er altså ikke umiddelbart relevant på motorveje.

De nye danske vejregler (Vejdirektoratet, 2012a) definerer **overhalingssigt** som den længde 85 % af trafikanten ønsker for at begynde og gennemføre en overhaling. Vejreglens værdier er baseret på en tysk beregningsmodel, formentlig den, der er anvendt i de tyske vejregler (Forschungsgesellschaft für Strassen- und Verkehrswesen, 1995).

Den tyske model rummer følgende delelementer, jævnfør Figur 11: Det modkørende køretøj, forudsættes under hele manøvren at have hastigheden $V_{85\%}$, mens det køretøj, der overhales, forudsættes under manøvren at køre med en hastighed, der er 85 % af $V_{85\%}$ -værdien på vejstrækningen. Det overhalende køretøj, antages at have en udgangshastighed på $V_{85\%}$, men øger under manøvren sin hastighed til 110 % af $V_{85\%}$ -værdien. Før overhalingen påbegyndes holder køretøjet en given afstand til det køretøj, der skal overhales. Ved overhalingens afslutning holdes ligeledes en given afstand til det overhalede køretøj, og der er tillige en vis mindste sikkerhedsafstand til det modkørende køretøj.

Sikkerhedsafstandene er ikke oplyst, men de udledte overhalingssigtlængder er som angivet nedenfor.

Hastighed, V_p [km/h]	90	80	70	60	50
Sigtlængde, S_{over} [m]	700	625	575	525	500



Figur 11. Model for overhaling efter de tyske vejregler.

Efter (Forschungsgesellschaft für Strassen- und Verkehrswesen, 1995).

Tilstedeværelse af overhalingssigt er en kvalitet ved vejudformningen, og i reglen tilstræber man, at der på det almindelige vejnet er overhalingssigt på en passende stor andel af vejstrækningen og med passende lille afstand mellem de delstrækninger, der giver overhalingsmulighed. Overhalingsmulighed fordrer dog samtidig, at den modkørende trafiks intensitet er passende lav.

Overhalingssigtlængden bedømmes for personbiler ved den ønskede hastighed. Bedømmelsen baserer sig på særskilte modeller.

Modellerne er typisk mere komplekse end de modeller, der knytter sig til fastlæggelsen af stop- og mødesigt. For det første involverer overhalingsmodellerne (mindst) tre trafikanter, den overhalende, den modkørende og den eller de, der bliver overhalet. For det andet kan overhalingsmodellerne rumme det moment, at den overhalende trafikant indtil et vist tidspunkt under overhalingen, kan vælge at afbryde manøvren.

7.2 Øjets opløsningsevne

De geometriske sammenhænge forudsætter at objektet, en genstand på kørebanen eller et modkørende automobil, kan ses. Det kræver, ud over at oversigten er fri, at den synlige del af objektet er så stort, at trafikantens øje kan opfatte objektet.

Det menneskelige øje har en opløsningsevne, der gør det muligt at skelne genstande, der har en udstrækning på mindst 1 bueminut (1'). Værdien gælder et »normalt« øje, men kan for de fleste også opnås ved at anvende korrigerende briller.

Ved vurderingen af de geometriske sammenhænge, skal man sikre sig, at de nødvendige sigtlængder er til stede i forhold til den situation, hvor objektet har en udstrækning, der svarer til øjets opløsning på den aktuelle afstand.

Eksempel 7.A – Øjets opløsningsevne

Givet: Hvor stor en del af en væltet træstamme skal være synlig over en bakketop for at en trafikant med normalt syn kan opfatte stammen som en hindring på en afstand af 100 m?

Løsning: Øjets opløsningsevne omregnes til radianer, og buelængden svarende til den givne afstand på 100 m bestemmes:

$$100 \cdot \frac{1^\circ}{60} \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 29 \text{ mm}$$

De øverste knapt 3 cm af træstammen skal altså kunne ses over bakken, før trafikanten kan opfatte og reagere på hindringen. \square

De objektpunkthøjder, h_0 , der angives i vejreglerne vil i reglen være reduceret, således at der er taget hensyn til, at en del af objektet skal være synligt. En objekthøjde på 0,20 m vil således beregningsmæssigt være reduceret til en objektpunktshøjde på $h_0 = 0,15$ m, idet ca. 5 cm af objektet skal være synligt ved de stopsigtlængder, der normalt optræder. Et modkørende køretøj med køretøjshøjde på 1,2 m er tilsvarende reduceret til en objekt-

punktshøjde på $h_o = 1,00$ m, således at ca. 20 cm af køretøjet er synligt hen over en bakketop.

7.3 Sigt i vertikalkurver

Der skelnes mellem konvekse og konkave vertikalkurver og mellem lange og korte kurver.

Konvekse kurver optræder på en bakketop; konkave i en dalbund.

Lange kurver er sådanne, hvor kurvens længde er større end sigtlængden. Korte kurver er tilsvarende sådanne, hvor kurvens længde er mindre end sigtlængden.

7.3.1 Sigt i konveks vertikalkurve

I konvekse kurver skal den nødvendige oversigt være til stede hen over bakkens top.

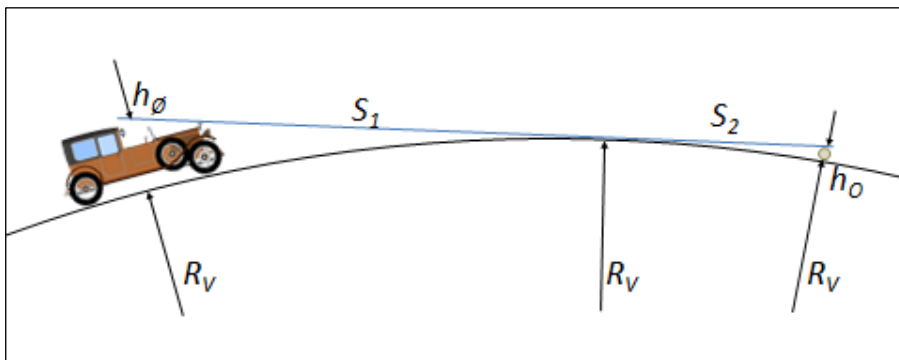
Er der tale om en **lang, konveks vertikalkurve**, er situationen, som skitseret i Figur 12. Heraf fremgår, at sigtlængden, S [m], kan udtrykkes:

$$\begin{aligned} [81] \quad S &= S_1 + S_2 = \sqrt{(R_V + h_\emptyset)^2 - R_V^2} + \sqrt{(R_V + h_o)^2 - R_V^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot R_V \cdot h_\emptyset + h_\emptyset^2} + \sqrt{2 \cdot R_V \cdot h_o + h_o^2} \\ &\approx \sqrt{2 \cdot R_V \cdot h_\emptyset} + \sqrt{2 \cdot R_V \cdot h_o} = \sqrt{2 \cdot R_V} \cdot (\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_o}) \end{aligned}$$

... hvor:

R_V	er vertikalkurvens radius [m],
h_\emptyset	er øjepunkthøjden, altså den højde over vejoverfladen, som trafikantens øjne befinder sig i, [m]; $h_\emptyset \ll R_V$, og
h_o	er objektpunkthøjden, altså hvor langt op over vejoverfladen det objekt, trafikanten skal reagere på, rækker, [m]; $h_o \ll R_V$

Når den nødvendige sigtlængde, S , er kendt, følger heraf:



Figur 12. Oversigt (her stopsigt) i lang, konveks vertikalkurve med kurveradius R_V .

$$[82] \quad R_{V,Min} = \frac{S^2}{2 \cdot (\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_o})^2}$$

Eksempel 7.B – Sigt gennem lang, konveks vertikalkurve

Givet: En retlinet, tosporet vejstrækning i det åbne land planlægges med hastigheden $V_p = 80$ km/h, og det er besluttet at dimensionere strækningen for hastigheden $V_d = 100$ km/h. På den baggrund er stopsigtelængden bestemt til $S_{Stop} = 160$ m. Bestem den mindste vertikalkurveradius, der sikrer stopsigt, når øjepunkthøjden ansættes til $h_\emptyset = 1,00$ m, og når objektpunkthøjden ansættes til $h_o = 0,15$ m.

Løsning: Mindsteradierne bestemmes af udtryk [82]:

$$R_{V,Min} = \frac{S_{Stop}^2}{2 \cdot (\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_o})^2} = \frac{160^2}{2 \cdot (\sqrt{1,00} + \sqrt{0,15})^2} = 6651 \text{ m}$$

hvilket i praksis vil blive rundet op til $R_{V,Min} = 6700$ m. \square

Formel [82] gælder, så længe sigtlængden er længere end vertikalkurvens bue, dvs. $S \geq R_V \cdot \alpha$, hvor α [rad] er vinkelændringen, som vertikalkurven spænder over.

Er der tale om en **kort, konveks vertikalkurve**, så vertikalkurven er kortere end sigtlængden, giver udtrykket [82] radier, der er på den sikre side.

Betragtes situationen på Figur 13, hvor øjepunktet og objektpunktet befinder sig på hver sin side af vertikalkurvens bue, haves:

$$[83] \quad S = \frac{h_\emptyset}{\sin x} + \frac{1}{2} \cdot R_V \cdot \alpha + \frac{h_o}{\sin(\alpha-x)} \approx \frac{h_\emptyset}{x} + \frac{R_V \cdot \alpha}{2} + \frac{h_o}{\alpha-x}$$

... hvor:

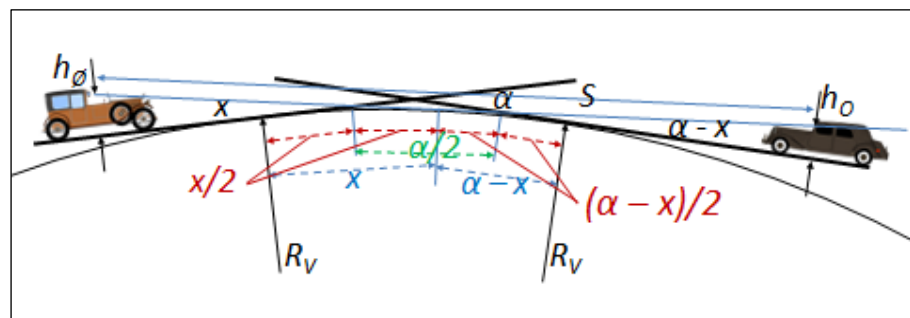
α er vinkelændringen, som vertikalkurven spænder over, [rad], og
 x er vinklen mellem sigtelinjen og den ene tangent [rad]

Den korteste sigtelinje findes i punktet, hvor:

$$[84] \quad \frac{dS}{dx} = \frac{h_\emptyset}{x^2} + \frac{h_o}{(\alpha-x)^2} = 0$$

hvoraf:

$$[85] \quad x = \frac{\sqrt{h_\emptyset}}{\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_o}} \cdot \alpha$$



Figur 13. Oversigt (her mødesigt eller overhalingssigt) i kort, konveks vertikalkurve med kurveradius R_V .

Herefter kan udtryk [83] omformes:

$$[86] \quad S = \frac{h_\emptyset}{x} \cdot \frac{\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_o}}{\sqrt{h_\emptyset}} + \frac{R_V \cdot \alpha}{2} + \frac{\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_o}}{\sqrt{h_o}} = \frac{(\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_o})^2}{\alpha} + \frac{R_V \cdot \alpha}{2}$$

Når den nødvendige sigtlængde, S , er kendt, følger heraf:

$$[87] \quad R_{V,Min} = \frac{2}{\alpha^2} \cdot \left(\alpha \cdot S - ((\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_o})^2) \right)$$

Grænsetilfældet, hvor $S = R_V \cdot \alpha$, indtræffer, når

$$[88] \quad \alpha = 2 \cdot \frac{(\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_o})^2}{S}$$

Eksempel 7.C – Sigt gennem kort, konveks vertikalkurve

Givet: På en retlinet vejstrækning skal der sikres stopsigt på $S_{Stop} = 160$ m gennem en konveks vertikalkurve, som giver længdegradienten en vinkelændring på $\alpha = 15$ ‰. Bestem den mindste vertikalkurveradius, der sikrer stopsigt, når øjepunkthøjden ansættes til $h_\emptyset = 1,00$ m, og når objektpunkthøjden ansættes til $h_o = 0,15$ m.

Løsning: Af udtryk [88] findes den grænse-vinkelændring, under hvilken der kan anvendes en kort vertikalkurve:

$$\alpha_{grænse} = 2 \cdot \frac{(\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_o})^2}{S} = 2 \cdot \frac{(\sqrt{1,00} + \sqrt{0,15})^2}{160} = 0,0241$$

Da værdien, 24 ‰, er større end længdegradientens vinkelændring, kan man, jævnfør også Figur 14, benytte formel [87] til at bestemme den søgte, mindste vertikalkurve:

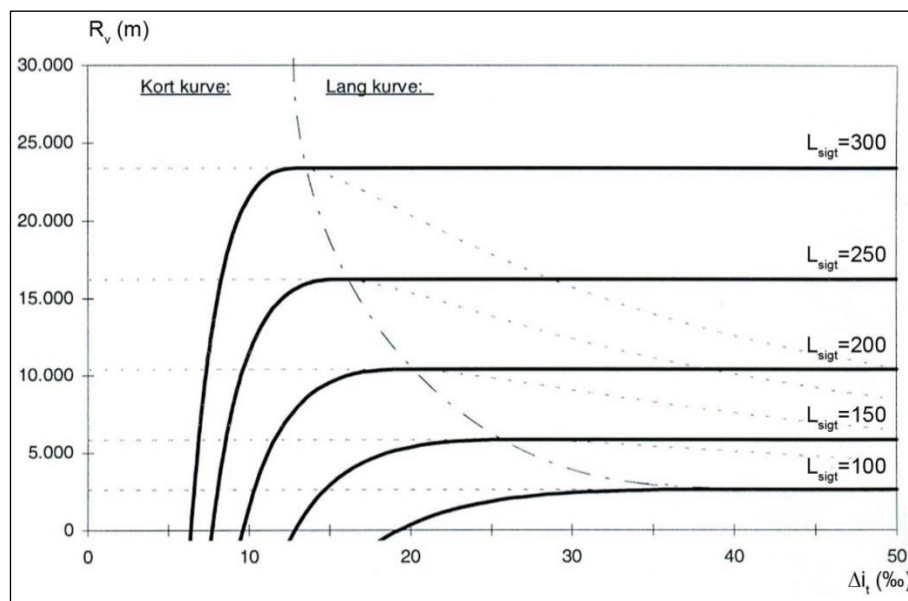
$$R_{V,Min} = \frac{2 \cdot (\alpha \cdot S - ((\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_o})^2))}{\alpha^2} = \frac{2 \cdot (0,015 \cdot 160 - ((\sqrt{1,00} + \sqrt{0,15})^2))}{0,015^2} = 4226 \text{ m}$$

□

Sammenhængen mellem ændringen i længdegradient, ønsket sigtlængde og nødvendig (mindste) vertikalkurveradius kan, når øjenhøjden og objekthøjden er fastlagt, illustreres som i Figur 14, hvor venstre del af kurverne gælder for korte, konvekse vertikalkurver og højre for lange.

Sættes $R_{V,Min} = 0$ i formel [87] beskrives situationen, hvor sigtlinjen netop berører knæpunktet uden afrundingskurve. Denne situation indtræder, når vinkelændringen er:

$$[89] \quad \alpha = \frac{(\sqrt{h_\emptyset} + \sqrt{h_o})^2}{S}$$



Figur 14. Sammenhæng mellem radius, R_v , i konveks vertikalkurve, længdegradient-ændring, $\alpha = \Delta i_t$ [‰] gennem kurven og nødvendig sigtlængde, L_{sigt} . Beregning baseret på formlerne [82] og [87], idet øjenhøjde, $h_o = 1,00$ m, objekthøjde, $h_o = 0,15$ m.
Efter (Vejdirektoratet, 2012b).

7.3.2 Sigt i konkave vertikalkurver

Konkave kurver optræder ved en dalbund. Her vil den nødvendige sigtlængde normalt være til stede, men der kan være særlige situationer, hvor sigt kan være begrænset af et brodæk eller et tunnelloft. Tillige gælder, at vejen skal være oplyst ved kørsel i mørke.

Den sigtlængde, der er til stede under et brodæk eller et tunnelloft, bestemmes på tilsvarende måde som ved kørsel gennem en konveks vertikalkurve.

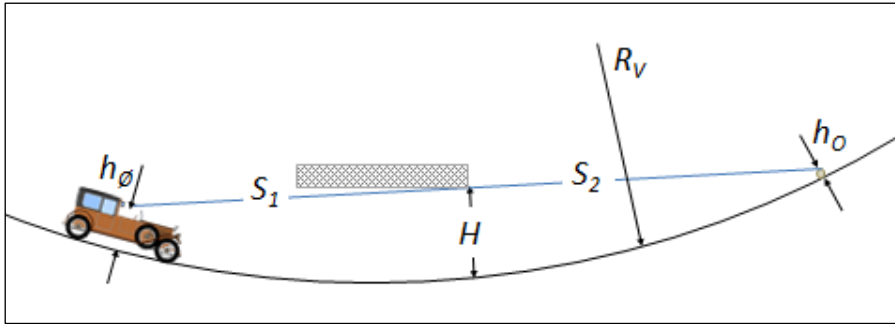
Mens beregningen i konvekse vertikalkurver baserer sig på øjepunkthøjden for en chauffør, der er placeret lavt, typisk i en personbil, så er det øjepunkthøjden for en højt placeret chauffør, typisk chaufføren i en lastbil, der er kritisk ved vurderingen af sigt gennem konkave vertikalkurver.

Betragtes en lang, konkav vertikalkurve, findes, jævnfør Figur 15:

$$\begin{aligned}
 [90] \quad S &= S_1 + S_2 \\
 &= \sqrt{(R_v - h_o)^2 - (R_v - H)^2} + \sqrt{(R_v - h_o)^2 - (R_v - H)^2} \\
 &\approx \sqrt{2 \cdot R_v \cdot (H - h_o)} + \sqrt{2 \cdot R_v \cdot (H - h_o)} \\
 &= \sqrt{2 \cdot R_v} \cdot (\sqrt{H - h_o} + \sqrt{H - h_o})
 \end{aligned}$$

... hvor:

R_v	er vertikalkurvens radius [m],
h_o	er øjepunkthøjden, altså den højde over vejoverfladen, som trafikantens øjne befinder sig i, [m]; $h_o \ll R_v$,



Figur 15. Oversigt (her stopsigt) i lang, konkav vertikalkurve med kurveradius R_V .

h_0 | er objektpunkthøjden, altså hvor langt op over vejoverfladen det objekt, trafikanten skal reagere på, rækker, [m]; $h_0 \ll R_V$, og
 H | er frihøjden under brodækket eller tunnelloftet [m]

Når den nødvendige sigtlængde, S , er kendt, følger heraf:

$$[91] \quad R_{V,Min} = \frac{S^2}{2 \cdot (\sqrt{H-h_0} + \sqrt{H-h_0})^2}$$

Eksempel 7.D – Sigt gennem konkav vertikalkurve

Givet: På en retlinet vejstrækning skal der sikres stopsigt på $S_{Stop} = 160$ m gennem en konkav vertikalkurve, som fører vejen gennem en tunnel med frihøjde $H = 4,50$ m. Bestem den mindste vertikalkurveradius, der sikrer stopsigt. Øjepunkthøjden sættes til $h_0 = 2,50$ m, svarende til forholdene for chaufføren af en lastbil. Objektpunkthøjden ansættes til $h_0 = 0,15$ m.

Løsning: Vertikalkurveradien bestemmes af udtryk [91):

$$R_{V,Min} = \frac{S^2}{2 \cdot (\sqrt{H-h_0} + \sqrt{H-h_0})^2} = \frac{160^2}{2 \cdot (\sqrt{4,50-2,50} + \sqrt{4,50-0,15})^2} = 1045 \text{ m}$$

hvilket i praksis vil blive rundet op til $R_{V,Min} = 1100$ m \square

Trafikanten skal afpasse sin hastighed, således det til stadighed vil være muligt at bringe køretøjet til standsning, hvis der skulle være en hindring på kørebanen. Ved kørsel i mørke skal trafikanten derfor tilpasse sin hastighed til de sigtforhold, som køretøjets lygter sikrer.

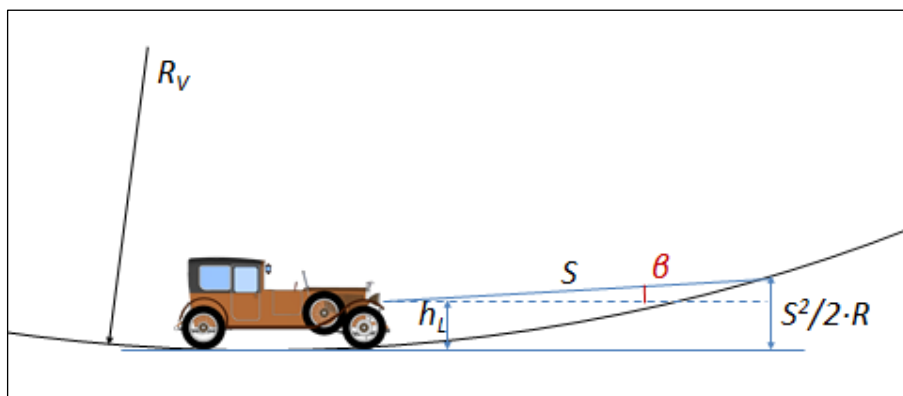
Køres der på en ubelyst vej, skal fjernlyset kunne oplyse vejbanen mindst 100 m foran køretøjet. Hvis lygterne har stor lysstyrke, og sigtforholdene tillader det, kan en endnu længere strækning dog oplyses, således at det vil være forsvarligt at køre med en hastighed, der modsvarer denne opnåelige sigtlængde.

Køres gennem en konkav vertikalkurve med radius R_V , vil, jævnfør Figur 16, lyskeglen ramme vejoverfladen i en afstand, S [m], der er bestemt af:

$$[92] \quad \frac{S^2}{2 \cdot R_V} = h_L + S \cdot \tan \beta \approx h_L + S \cdot \beta$$

... hvor:

h_L | er højden [m], lygterne anbragt i, og



Figur 16. Fjernlysets udstrækning ved kørsel i en i lang, konkav vertikalkurve med kurveradius, R_v .

β | er lyskeglens hældning med køretøjets grundplan, [rad]

Heraf følger, når den nødvendige sigtlængde er kendt:

$$[93] \quad R_{v,Min} = \frac{S^2}{2 \cdot (h_L + S \cdot \beta)}$$

Hvor køretøjerne anvender nærlys, fx for ikke at blænde modkørende, er det et krav, at lys-mørkegrænsen fra lygternes strålebundt har et fald på mindst 1 %. Nærlyset vil således på retlinet vej højst kunne oplyse kørebanen i en afstand af $100 \cdot h_L$, hvilket sætter den øvre grænse for den hastighed, som det ifølge en naturvidenskabelig tolkning af færdselsloven vil være forsvarligt at køre med under disse forhold.

7.3.3 Sammenfatning af krav til vertikalkurveradier

Kurveradierne i længdeprofilet skal vælges, således at alle de ovenfor nævnte hensyn er tilgodeset i relevant omfang ved den aktuelle hastighed. Den nævnte oversigt skal kontrolleres såvel i vertikal- som i horisontalkurver.

Der skal altid være stopsigt ved dimensioneringshastigheden, V_d , og komfortabel kørsel ved planlægningshastigheden, V_p .

Hvis der kan optræde modkørende trafik, skal der tillige enten være spærrelinjer eller være mødesigt ved V_p , og der skal på en passende stor del af strækningen være overhalingssigt, ligeledes ved V_p .

Eksempel 7.E – Komfortbestemt vertikalkurveradius

Givet: En motortrafikvej skal have et opadgående knæk afrundet. Knækket ændrer vejens længdegradient fra 25 ‰ til 20 ‰, og det skal udformes, således at det tillader overhalingssigt på $S_{Over} = 700$ m, svarende til en planlægningshastighed på $V_p = 90$ km/h. Der regnes med en øjepunkthøjde på $h_o = 1,00$ m og med en objektpunkthøjde på $h_o = 1,00$ m. Vurder hvor stor vertikalkurveradius skal være.

Løsning: Anvendes formel [82] for en lang, konveks vertikalkurve, findes:

$$R_{V,Min} = \frac{700^2}{2 \cdot (\sqrt{1,00} + \sqrt{1,00})^2} = 61.250 \text{ m}$$

Denne radius er stor, og i virkeligheden kan den nødvendige sigtelinje opnås uden afrunding af knækket, idet vinkelændringen, jævnfør [89], er:

$$\alpha = \frac{(\sqrt{1,00} + \sqrt{1,00})^2}{700} = 0,0057 > 5 \text{ ‰}$$

Det er derfor komforthensyn, der i dette tilfælde bestemmer vertikalkurvens størrelse. Sættes den maksimalt tilladte vertikalacceleration gennem kurven til $g_{V,till} = 0,5 \text{ m/s}^2$, findes, jævnfør formel [47], at kurven mindst skal have radius:

$$R_{V,Min} = \frac{\left(\frac{90}{3,6}\right)^2}{0,5} = 1.250 \text{ m}$$

□

7.4 Sigt i horisontalkurver

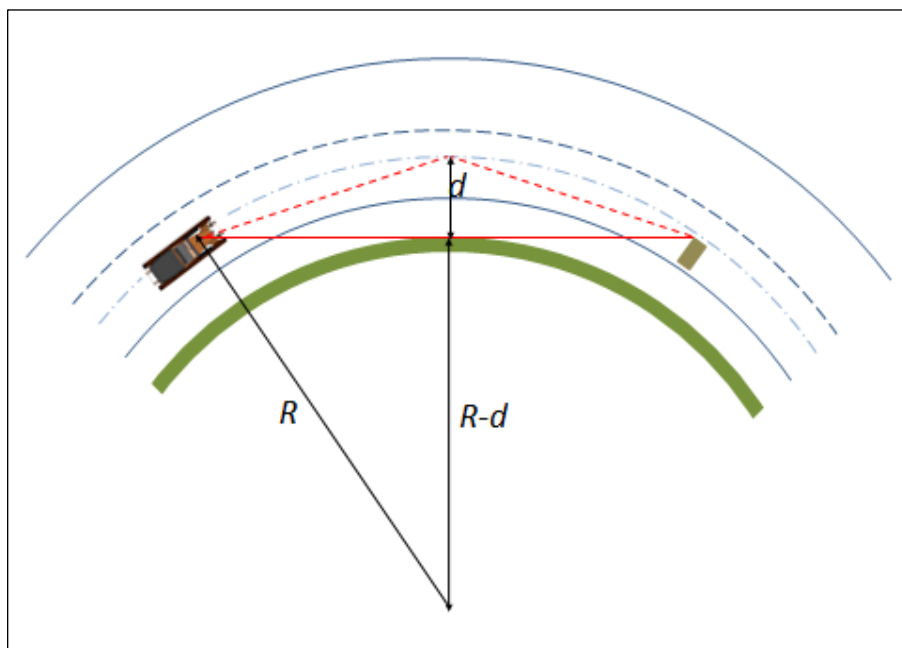
De sigthindringer, der optræder i horisontalkurver, befinder sig oftest langs kurvens inderside, eller på flersporede veje i midterrabatten. Der er typisk tale om autoværn, sammenhængende beplantning, støjskærme, skråningsanlæg eller mure, fx i tunneller. Hindringen kan imidlertid også være en kø, der passeres, eller en række standsede køretøjer langs vejen.

Bemærk, at der for vejmyndigheden kan være god økonomi i at holde oversigten inde på vejarealet, altså at anvende horisontalradier, som er forholdsvis store ved den aktuelle hastighed. Rækker oversigtsarealet ind over græsrabat og beplantning, er der en løbende driftsomkostning til at pleje dette areal, således at oversigten ikke dækkes. Rækker oversigtsarealet ind på tilstødende arealer i privat eje, skal disse arealer pålægges servitut, og der skal føres tilsyn med, at servitutforpligtelsen bliver respekteret.

De nødvendige sigtlængder gennem horisontalkurver bestemmes principielt på samme måde som ved kørsel gennem vertikalkurver, altså på grundlag af stopsigt, mødesigt og overhalingssigt ved planlægningshastigheden, V_p , henholdsvis ved dimensioneringshastigheden, V_d . Ligesom ved vertikalkurverne skelnes mellem lange og korte horisontalkurver.

I det horisontale plan antages køretøjet placeret, således at man i stopsigtsituationen kan måle oversigten midt i køresporet, og i møde- og overhalingssigtsituationerne midt i kørebanen.

Det betyder, at sideafstanden, d , i stopsigtsituationerne normalt er sammensat af den halve kørselsbredde, bredden af eventuel kantbane, bredden af eventuelt nødspor samt bredden af oversigtbare arealer af rabatten og dennes naboarealer. Sidstnævnte kræver dog, at græs og anden beplantning holdes klippet, og at der på private arealer er pålagt oversigtsservitutter, som håndhæves. Ved vurderingen skal tages hensyn til vejens vertikalførløb.



Figur 17. Horisontalt stopsigt gennem en lang højredrejet kurve. Når cirkelradius $R = R_H$ er meget større end afstanden til hindringen d , $R_H \gg d$, vil trekantens hypotenusen (de røde kortstregslinjer) kunne regnes lig den halve sigtlængde, S . Ifølge reglen om punkts potens gælder da, at $\frac{1}{4} \cdot S^2 = 2 \cdot R_H \cdot d$.

Hvor der er tale om at vurdere stopsigt ved passage af en kø, må sideafstanden, d , naturligvis vurderes under hensyntagen til de konkrete forhold.

I møde- og overhalingssituationerne er sideafstanden, d , tilsvarende sammensat af køresporsbredden, bredden af eventuel kantbane, bredden af eventuelt nødspor samt bredden af oversigtbare arealer af rabatten og dennes naboarealer.

Geometrien ved vurdering af oversigten i **lange horisontalkurver**, dvs. kurver, hvis længde er større end den aktuelle sigtlængde, S , er vist i Figur 17 for stopsigtsituationen og i Figur 18 for møde- og overhalingssigtsituationerne.

I begge tilfælde vurderes relationen mellem den nødvendige oversigt, S , horisontalkurveradius, R_H og afstanden, d , til sidehindringer langs kurven. Da $R_H \gg d$, gælder, jævnfør reglen om punkts potens:

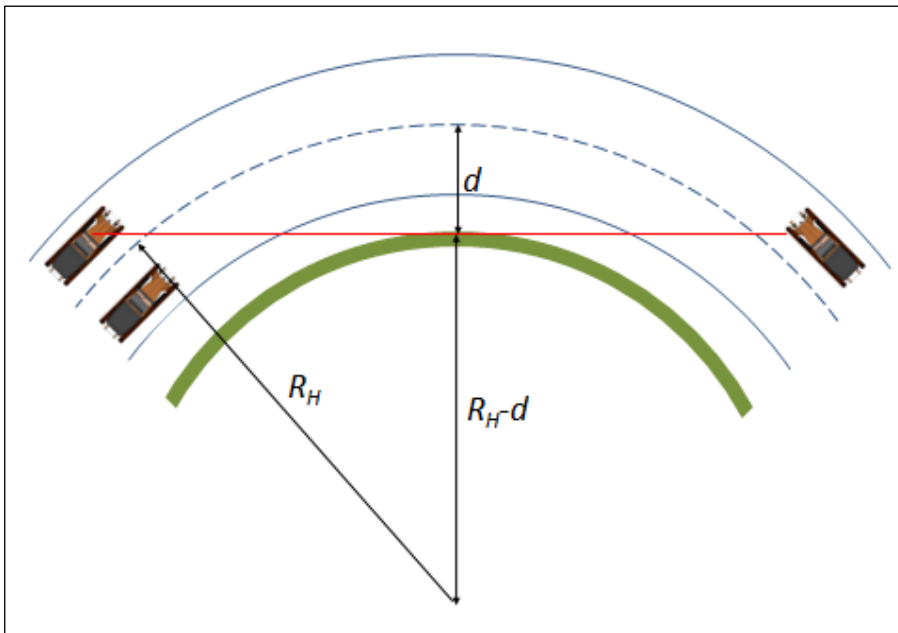
$$[94] \quad \frac{1}{4} \cdot S^2 = 2 \cdot R_H \cdot d$$

Eller

$$[95] \quad R_H = \frac{S^2}{8 \cdot d}$$

Eksempel 7.F – Sigt over rabat gennem lang horisontalkurve

Givet: På en vandret to-sporet vejstrækning skal der sikres stopsigt på $S_{Stop} = 164$ m gennem en lang horisontalkurve. Strækningen har en køresporsbredde på $2 \times 3,5$ m og kantbane på $0,5$ m i begge sider. Rabatten er $1,4$ m i begge sider. Bestem den mindste horisontalkurveradius, der sikrer stopsigt i kurvens inderside.



Figur 18. Horisontalt møde- og overhalingssigt gennem en lang curve.

Løsning: Sigthindrende genstande vil være placeret uden for rabatten. Afstanden, d , fra øjepunktet til rabattens yderside findes som:

Afstanden fra køresporskant til køresporsmidte	1,75 m
Kantbanebredden	0,50 m
Rabatbredden	1,40 m
I alt	<u>3,65 m</u>

Horisontalkurveradius bestemmes herefter af udtryk [95]:

$$R_H = \frac{S_{stop}^2}{8 \cdot d} = \frac{164^2}{8 \cdot 3,65} = 921 \text{ m} \sim 900 \text{ m} \quad \square$$

Eksempel 7.G – Sigt langs kø gennem lang horisontalkurve

Givet: Horisontalkurven i foranstående eksempel betragtes igen. Bestem den mindste horisontalkurveradius, der sikrer stopsigt i kurvens yderside, hvis der i kurven kan forekomme kødannelse i det modkørende spor (altså i kørselsretningen nærmest horisontalkurvens centrum).

Løsning: Køen i horisontalkurvens inderste spor vil udgøre sigthindrende genstand. Afstanden, d , fra øjepunktet og til bilerne i køen findes som:

Afstanden fra køresporskant til køresporsmidte	1,75 m
Afstanden fra køresporskant til kanten af et køretøj i kø	0,75 m
I alt	<u>2,50 m</u>

Horisontalkurveradius bestemmes herefter af udtryk [95]:

$$R_H = \frac{S_{stop}^2}{8 \cdot d} = \frac{164^2}{8 \cdot 2,50} = 1345 \text{ m} \sim 1400 \text{ m} \quad \square$$

Eksempel 7.H – Sigt gennem horisontalkurve på firesporet vej

Givet: En 4-sporet vej med midterrabat ønskes projekteret med 3,50 m brede kørespor, og således at afstanden fra højre spors kørebane kant, til ydersiden af grøften i samme side er 8,0 m. På en vandret strækning forløber vejen gennem en horisontalkurve, hvis radius skal bestemmes, således at der er stopsigt på mindst 220 m.

Løsning: Horisontalkurves mindsteradius bestemmes af formel [95]:

$$R_H = \frac{S_{\text{Stop}}^2}{8 \cdot d} = \frac{220^2}{8 \cdot 8,00} = 756 \text{ m}$$

Hvis strækningen udformes med denne radius, og vejen senere trafikeres stærkt og eventuelt med megen tung trafik, risikerer man imidlertid, at det ikke vil være forsvarligt at opretholde den ønskede hastighed.

Når der optræder kø i det højre kørespor, vil køen være sigthin-drende for bilisterne i det venstre spor, og de vil derfor reelt blot have en d -afstand på en del af kørebanes bredde. Denne d -afstand kan typisk sættes til 2,50 m. I så fald vil oversigten blot være:

$$S = \sqrt{8 \cdot R_H \cdot d} = \sqrt{8 \cdot 756 \cdot 2,50} = 123 \text{ m}$$

svarende til stopsigt for en noget lavere hastighed end oprindeligt forudsat: Ifølge de nye danske vejregler svarer stopsigt på 220 m til en dimensioneringshastighed på omkring 120 km/h, mens en stopsigt på 120 m svarer til en hastighed på omkring 80 km/h. \square

I **korte horisontalkurver**, dvs. kurver hvis længde, L , er mindre end den aktuelle sigtlængde, S , er foranstående formler lidt på den sikre side. Situationen med dårligst oversigt optræder, når kurven ligger midt mellem øje og genstand, og der vil her være to tangentstykker af længden k :

$$[96] \quad k = \frac{S-L}{2}$$

Øje- og objektpunkt befinder sig i afstanden $\sqrt{(R_H^2 + k^2)}$ fra kurvecentrum, hvor R_H er kurvens radius. Når d betegner afstanden til sidehindringen findes ved retlinede trekkanter:

$$[97] \quad \left(\frac{S}{2}\right)^2 = ((R_H^2 + k^2) - (R_H - d)^2) + d^2 = \left(\frac{S-L}{2}\right)^2 + 2 \cdot R_H \cdot d$$

$$[98] \quad (2 \cdot S - L) \cdot L = 8 \cdot R_H \cdot d$$

$$[99] \quad R_H = \frac{(2 \cdot S - L) \cdot L}{8 \cdot d}$$

Eksempel 7.1 – Lang og kort horisontalkurve

Givet: En 2-sporet vejstrækning forløber gennem en horisontalkurve, hvor der ønskes overhalingssigt på $S_{\text{Over}} = 625$ m. Afstanden fra en bilist, der kører nær kørebanekanten, til ydersiden af grøften i samme side 8,0 m. Bestem den horisontalradius, der er nødvendig.

Løsning: Hvis kurven er lang, $L > S_{\text{Over}}$, bestemmes mindste radius af [95]:

$$R_H = \frac{S^2}{8 \cdot d} = \frac{625^2}{8 \cdot 8,00} = 6.105 \text{ m}$$

Hvis kurven er kort, fx 500 m lang, bestemmes mindste radius af [99]:

$$R_H = \frac{(2 \cdot S - L) \cdot L}{8 \cdot d} = \frac{(2 \cdot 625 - 500) \cdot 500}{8 \cdot 8,00} = 5.860 \text{ m} \quad \square$$

7.5 Opgaver

A. Undersøg, hvordan øjepunkt- og objektpunkthøjderne størrelse har været fastlagt i de danske vejregler og vejregelforslag, der har været fremlagt siden 1943 (husk udtømmende referencer). Diskuter forskelle og foreslå forklaringer på væsentligere ændringer. □

B. Undersøg, hvordan cyklisters placering i horisontalkurver har været fastlagt i de danske vejregler og vejregelforslag (husk udtømmende referencer). Diskuter forskelle og foreslå forklaringer på væsentligere ændringer. □

C. Opstil en tabel der for planlægningshastigheden, V_p , i intervallet 30-110 km/h angiver mindsteradierne for konvekse vertikalkurver, idet sigtelængder samt øjepunkt- og objektpunkthøjder fastsættes som i de danske vejregler, og idet der betragtes såvel stopsigt, mødesigt, overhalingssigt samt komforthensyn. Regn med et sikkerhedstillæg på 20 km/h: $V_d = V_p + 20$ km/h. □

D. Opstil en tabel der for planlægningshastigheden, V_p , i intervallet 30-110 km/h angiver mindsteradierne for konkave vertikalkurver under broer, idet sigtelængder samt øjepunkts- og objektpunktshøjder fastsættes som i de danske vejregler, og idet der betragtes såvel stopsigt, mødesigt, overhalingssigt samt komforthensyn. Regn med et sikkerhedstillæg på 20 km/h:

$$V_d = V_p + 20 \text{ km/h.} \quad \square$$

E. Opstil en tabel, der for planlægningshastigheden, V_p , i intervallet 30-110 km/h angiver mindsteradierne for horisontalkurver, idet sigtelængder fastsættes som de danske vejregler, idet køresporsbredden sættes til 3,5 m og kantbanebredden til 0,5 m, og idet der betragtes følgende situationer:

- Stopsigt dels langs kø, dels med oversigt over 2,0 m rabat, idet der bruges et sikkerhedstillæg på 20 km/h: $V_d = V_p + 20$ km/h.
- Mødesigt over 2,0 m rabat.
- Overhalingssigt over 4,0 m rabat.
- Komforthensyn, idet der forudsættes 70 ‰ sidehældning, ubetydelig længdegradient og overholdelse af vejreglernes $f_{r,till}$. □



BIBLIOGRAFI

- Ashworth, R. (1972). *Highway Engineering*. London: Heinemann Educational Books Ltd.
- Bendtsen, H. (2004). *Rolling resistance, fuel consumption - literature review*. Roskilde: Road Directorate, Danisk Road Institute.
- Bolet, L. (2009). Problematisk grundlag for nye standselængder - åbent brev til Vejreglerådet. *Trafik & Veje*(11), s. 44-48.
- Bolet, L., & Kjems, E. (2015). *Vejstrækningens geometri - Tracering*. Trafikforskningsgruppen, Institut for Byggeri og Anlæg. Aalborg: Aalborg Universitet, Institut for Byggeri og Anlæg.
- Bontell, C. (1983). *Dokumentation av färdtekniska grundvärden och linjeföring*. Borlänge: Vägverket.
- Borchardt, D., Bosch, E., Durth, W., Finsinger, O., Hiersche, E.-U., Köppel, G., et al. (1979). *RAL-L-1 Kommentar zu den Richtlinien für de Anlage von Landstrassen. Teil: Linienführung. Abschnitt: Elemente der Linienführung. Ausgabe 1973*. Köln: Forschungsgesellschaft für das Strassenwesen.
- Christiansen, I. (1944). *Studier over Kurveradiens Størrelse i Vejes plane Figur*. Kjøbenhavn: Den Polytekniske Læreanstalts Laboratorium for Vej- og Jernbanebygning samt Byplanlægning.
- FGSV. (2008). *Richtlinien für die Anlage von Autobahnen - RAA*. Köln: Forschungsgesellschaft für Strassen- und Verkehrswesen e.V.
- Forschungsgesellschaft für Strassen- und Verkehrswesen. (1995). *Richtlinien für de Anlage von Strassen RAS - Teil: Linienführung RAS-L*. Köln: FGSV Verlag GmbH.
- Greibe, P. (2008). Bremselængde, friktion og adfærd. Resultater og anbefalinger baseret på bremseforsøg. Ikke publiceret.
- Herrstedt, L. (2007). *Dimensioneringsgivende Trafikant. Reaktionstid, Bremsereaktionstid og Beslutningstid. Litteraturstudium - Sammenfatning*. Lyngby: Trafitec.
- Hubendick, P. (1976). *SRS Vägformgivning*. Stockholm: SRS Förlag.
- Kasper, H., Schürba, W., & Lorenz, H. (1968). *Die Klotoide als Trassierungselement*. Bonn: Ferd. Dümmlers Verlag.
- Larsen, S. (2000). Længdeprofil. In B. Thagesen, *Veje og Stier* (1 ed., p. 564). Kgs. Lyngby: Polyteknisk Forlag.
- Meltofte, K. (2011). *Revurdering af reaktionstiden ved stopsigte*. Aalborg: Aalborg Universitet.
- Ministeriet for Offentlige Arbejder. (1943). *Vejregler. Normer for Anlæg, Udvidelse og Ombygning af Veje, Gader og Stier*. København: J.H. Schultz A/S.
- Ministeriet for offentlige arbejder, Vejdirektoratet. (1964). *Vejregler (Udkast). Almindelige regler for vejes linieföring samt længde- og*

tværprofiler m.v. til vejledning ved anlæg, udvidelse og ombygning af offentlige veje. København: Ministeriet for offentlige arbejder, Vejdirektoratet.

Statens Vegvesen. (2008). *Linjeføringsteori - Håndbok 265.* Oslo: Statens Vegvesen Vegdirektoratet.

Thagesen, B. (2000). *Veje og Stier.* Lyngby: Polyteknisk Forlag.

Transportministeriet. (2011, 05 14). Bekendtgørelse om køretøjers største bredde, længde, højde, vægt og akseltryk - Dimensionsbekendtgørelsen. *BEK nr. 577 af 6. juni 2011.* 2014, Danmark.

Vejdirektoratet. (2012a). *Grundlag for udformning af trafikjarealer.* København: Vejdirektoratet.

Vejdirektoratet. (2012b). *Tracéring i åbent land.* København: Vejdirektoratet.

Vejdirektoratet. (2012c). *Model for beregning af overhalingsspor.* København: Vejdirektoratet.

Vejdirektoratet. (2012d). Bekendtgørelse om anvendelse af vejafmærkning. *BEK nr. 801 af 4. juli 2012,* 95. København, Danmark: Vejdirektoratet.

Vejdirektoratet. (n.d.). *Motorveje - projekteringsregler.* København: Motorveje.

Vejdirektoratet-Vejregelrådet. (1999a). *Veje og stier i åbent land. Hæfte 1. Forudsætninger for den geometriske udformning. Vejregelforslag.* København: Vejdirektoratet.

Vejdirektoratet-Vejregelrådet. (1999b). *Veje og stier i åbent land. Hæfte 2. Tracering. Vejregelforslag.* København: Vejdirektoratet.

Vejdirektoratet-Vejregelrådet. (2004). *Vej- og trafikteknisk ordbog.* København: Vejdirektoratet.

Vejdirektoratet-Vejregelrådet. (2008a). *Trafikarealer, land. Hæfte 1. Forudsætninger for den geometriske udformning. UDKAST.* København: Vejdirektoratet.

Vejdirektoratet-Vejregelrådet. (2008b). *Trafikarealer, land. Hæfte 2. Tracering. UDKAST.* København: Vejdirektoratet.

Vejdirektoratet-Vejregelrådet. (2013). *Katalog over typegodkendte vejbump.* København: Vejdirektoratet.

Vägverket. (2004). *Vägar och gators udformning.* Borlänge: Vägverket og Svenska Kommunförbundet.

Winkler, C. B., & Ervin, R. D. (1999). *Rollover of Heavy Commercial Vehicles.* Ann Arbor, Michigan: University of Michigan - Transportation Research Institut.



STIKORDSREGISTER

- bakkekørsel; 39
 bremselængde; 48
 bremsetid; 48
 bump; 44
 centrifugalacceleration
 vertikal; 44
 centrifugalkraft; *Se*
 centripetalkraft
 centripetalkraft; 12
 dimensioneringshastighed; 27
 dimensionsbekendtgørelsen; 28
 frihåndshastighed; 36
 friktionsellipse; 19
 friktionskoefficient; 18; 50
 friktionskraft; 18
 gradient
 radial; 11
 tangential; 11
 hastighedsprofil; 43
 horisontalkurve
 kort; 70
 lang; 68
 igangsætning; 40
 indslagsvinkel; 19
 kompensationsfaktor; 36
 kraftligevægt; 22
 kurvekørsel; 31
 komfortabel; 34
 luftens densitet; 14
 luftmodstand; 13
 luftmodstandskoefficient; 15
 længdegradient; *Se* gradient,
 tangential
 middelfriktionskoefficient; 50
 motoreffekt; 17
 mødesigt; 47; 58
 mødesigtlængde; 58
 normalreaktionskraft; 22
 objekthøjde; 58
 objektpunkthøjde; 58; 60
 overhalingssigt; 59
 overhalingssigtlængde; 59
 planlægningshastighed; 27
 reaktionslængde; 47
 reaktionstid; 47; 48
 retardation; 42
 Reynolds tal; 14
 rullemodstand; 15
 rullemodstandskoefficient; 16
 sidegradient; *Se* gradient, radial
 sigt; 57
 horisontalkurve; 67
 vertikalkurve, konkav; 64
 vertikalkurve, konveks; 61
 standselængde; 48
 standsning; 47
 stigningsmodstand; 12
 stopsigt; 47; 57
 stopsigtlængde; 57
 trækkraft; 16
 tværgradient; *Se* gradient, radial
 tyngdekraft; 12
 udskridning; 32
 vejkoordinatsystem; 11
 vertikalkurve
 konveks, kort; 62
 konveks, lang; 61
 vindkraft; 13
 væltning; 32
 øjepunkthøjde; 58
 øjets opløsningsevne; 60



RESUMÉ. Undervisningsnoten er skrevet til grundkurset i Vej- og Trafikteknik på Aalborg Universitets ingeniøruddannelser i byggeri og anlæg. Den behandler kræfter og kørselsdynamik ved kørsel på veje, altså nogle af de grundlæggende, fysiske vilkår, der skal tages i ed ved design af veje og stier.

NØGLEORD. Vejteknik; Kræfter; Kørselsdynamik; Kurvekørsel; Bakkekørsel; Standsning; Sigt; Aalborg Universitet.

Antal ord: 16.100.